Kantonale Fachschaft Mathematik

Repetitionsaufgaben: Trigonometrische Funktionen

Zusammengestellt von Lukas Fischer, KSA

Inhaltsverzeichnis

Vorbemerkungen für Lernende und Lehrpersonen

Die Trigonometrie und die trigonometrischen Funktionen sind sehr umfangreiche Themengebiete.
Die Stoffpläne der Luzerner Kantonsschulen unterscheiden sich hier erheblich. Deswegen ist es möglich, dass gewisse Stoffgebiete im folgenden Repetitionsprogramm gar nicht unterrichtet wurden.

Es sollen Absprachen gemacht werden, was alles repetiert werden soll, die Lernkontrolle ist dementsprechend anzupassen.

Viele der vorliegenden Aufgaben sind nur mit Hilfe eines Taschenrechners lösbar. Da an den Luzerner Kantonsschulen verschiedene Modelle im Einsatz sind, wird im Repetitionsprogramm auf konkrete Hinweise, wie die Befehle bei einzelnen Modellen lauten, verzichtet.

Lernziele

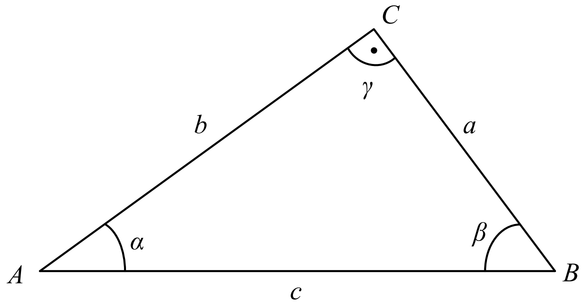
- Definition von Sinus, Cosinus und Tangens im rechtwinkligen Dreieck kennen
- Seiten und Winkel in einem rechtwinkligen Dreieck und in einem allgemeinen Dreieck berechnen können
- Definition von Sinus, Cosinus und Tangens für beliebige Winkel am Einheitskreis kennen
- Das Bogenmass kennen und Winkel umrechnen können
- Graphen der trigonometrischen Funktionen zeichnen können
- Symmetrieeigenschaften der Graphen kennen
- Trigonometrische Gleichungen mit Hilfe der Symmetrieeigenschaften lösen können
- Den Einfluss der Parameter auf die Graphen der trigonometrischen Funktionen kennen

I. Trigonometrie im Dreieck

1. Trigonometrie im rechtwinkligen Dreieck

a) Definition Sinus, Cosinus und Tangens

In einem rechtwinkligen Dreieck $(\gamma = 90°)$ gilt:



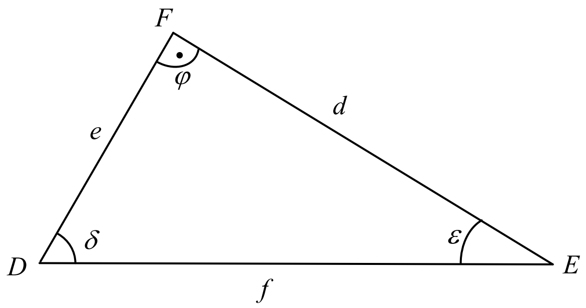
$$\text{Sinus} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \qquad \sin\alpha = \frac{a}{c}$$

$$\text{Cosinus} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c}$$

$$\text{Tangens} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \qquad \tan\alpha = \frac{a}{b}$$

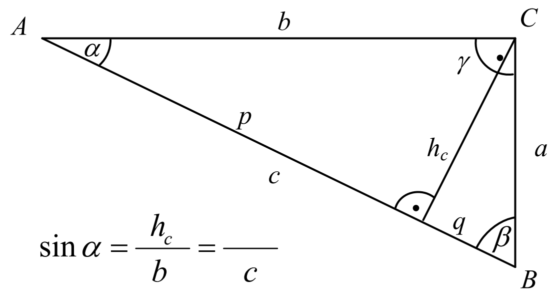
1. Vervollständige die unten stehenden Gleichungen (Lösungen ab S. 23)

a)



$\sin\delta = \_\_\_\_$ $\qquad \cos\_\_ = \frac{d}{\_\_\_\_}$ $\qquad \_\_\_\_ = \frac{e}{d}$

b)



$\sin\alpha = \frac{h_c}{b} = \frac{\_\_\_\_}{c}$

$\cos\beta = \frac{\_\_\_\_}{a} = \frac{a}{\_\_\_\_}$ $\qquad \tan\_\_ = \frac{h_c}{\_\_\_\_}$

b) Berechnungen im rechtwinkligen Dreieck

Taschenrechnerverwendung:

Bestimme mit dem Taschenrechner die Winkelgrösse α für die gilt: $\sin\alpha = 0.2$.

Lösung: $\alpha = \arcsin 0.2 \approx 11.54°$ auf dem Taschenrechner oft auch $\alpha = \sin^{-1} 0.2 \approx 11.54°$

Berechnungen mit dem Taschenrechner (runde auf zwei Stellen nach dem Komma)

2. Bestimme mit dem Taschenrechner

$\sin\alpha$ für	a) $\alpha = 10°$	b) $\alpha = 65°$
$\cos\alpha$ für	c) $\alpha = 20°$	d) $\alpha = 25°$
$\tan\alpha$ für	e) $\alpha = 30°$	f) $\alpha = 85°$

3. Bestimme mit dem Taschenrechner die Winkelgrösse α für die gilt:

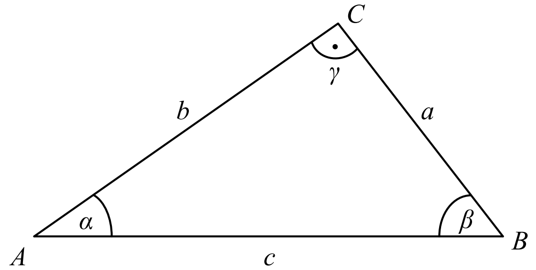
a) $\sin\alpha = 0.5$	b) $\sin\alpha = 0.866$	c) $\cos\alpha = 0.1257$
d) $\cos\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}$	e) $\tan\alpha = 0.2679$	f) $\tan\alpha = 2.9657$

c) Aufgaben

Musterbeispiel

Gegeben: $\gamma = 90°$, $\alpha = 35.1°$, und $c = 8.4$ cm

Bestimme die restlichen Seiten und Winkel



$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \quad \Rightarrow \quad a = c\cdot\sin\alpha = 8.4\,\text{cm}\cdot\sin(35.1°) \approx 4.83\,\text{cm}$$

$$\cos\beta = \frac{a}{c} \quad \Rightarrow \quad \beta = \arccos\left(\frac{a}{c}\right) = \arccos\left(\frac{4.83\,\text{cm}}{8.4\,\text{cm}}\right) \approx 54.9°$$

$$\tan\beta = \frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad b = a\cdot\tan(\beta) = 4.83\,\text{cm}\cdot\tan(54.9°) \approx 6.87\,\text{cm}$$

Selbstverständlich hätte der Winkel β auch mit Hilfe der Winkelsumme im Dreieck ($\alpha + \beta + \gamma = 180°$) berechnet werden können, ebenso hätten wir b mit Hilfe des Satzes von Pythagoras ausrechnen können, dann wäre uns aber die Übung im Umgang mit den trigonometrischen Beziehungen entgangen!

4. Für diese Aufgabe gehen wir vom Dreieck des Musterbeispiels $(\gamma = 90°)$ aus:

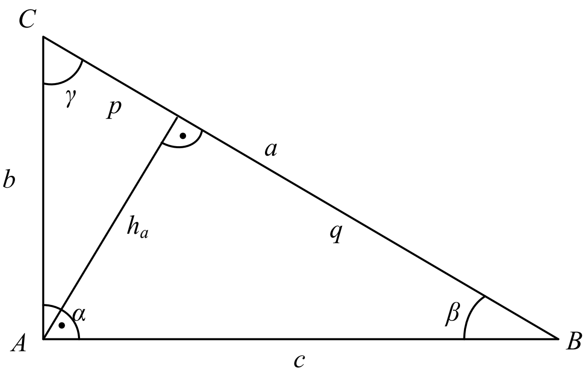
Gegeben sind: a = 5.11 cm und c = 8 cm. Berechne die fehlenden Seiten und Winkel.

5. Betrachte die Figur auf der rechten Seite:

Gegeben sind: $\alpha = 90°$, p = 3.1 cm und h_a = 5.2 cm.

Berechne die fehlenden Strecken und Winkel

(ausführliche Lösung im Lösungsteil).

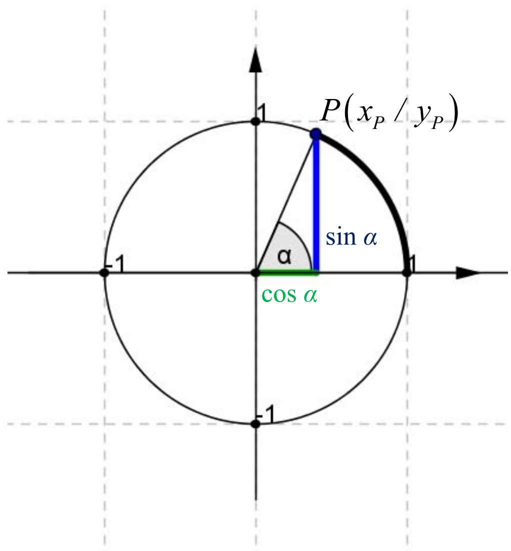


2. Trigonometrie im allgemeinen Dreieck

Die Definition von Sinus, Cosinus und Tangens, die bisher nur am rechtwinkligen Dreieck für spitze Winkel (Winkel, die kleiner sind als 90°) galt, wird nun für beliebige Winkel verallgemeinert:

a) Definition von Sinus und Cosinus für beliebige Winkel

Der Einheitskreis ist ein Kreis mit Radius 1.
Im folgenden Kapitel betrachten wir einen Einheitskreis in einem Koordinatensystem. Der Mittelpunkt liegt im Ursprung eines Koordinatensystems. Die Koordinaten eines Punktes $P(x_P / y_P)$, der auf diesem Kreis liegt, können wir nun in Abhängigkeit des Drehwinkels α angeben (der Winkel α wird von der x-Achse aus im Gegenuhrzeigersinn gemessen):

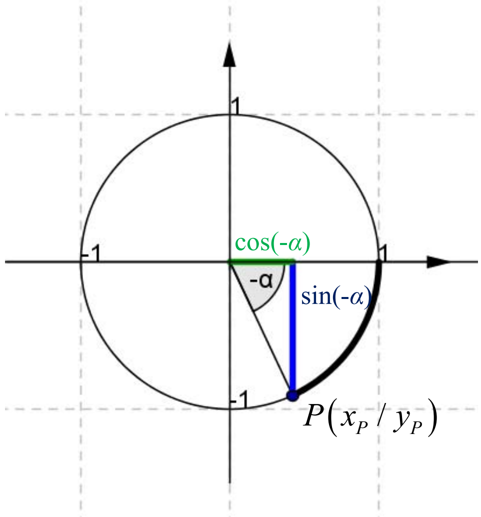


$$x_P = \cos\alpha \qquad\qquad y_P = \sin\alpha$$

Beachte: für spitze Winkel (wie in der Skizze eingezeichnet), entspricht diese Definition genau der Definition am rechtwinkligen Dreieck (hier ist die Hypotenuse 1).

Spezialfall

Falls sich der Winkel im Uhrzeigersinn von der x-Achse wegdreht, ist der Winkel negativ. Im Beispiel werden für den Winkel $\alpha = -65°$
Sinus und Cosinus graphisch ermittelt (mit dem Massstab gemessen):



Wir lesen ab: $\sin(-65°) \approx -0.9$

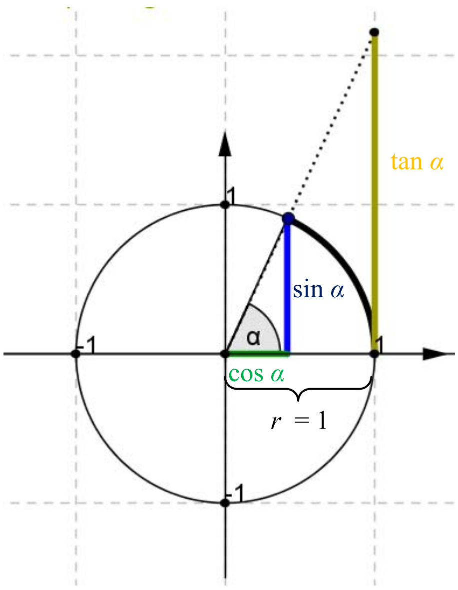
und: $\cos(-65°) \approx 0.5$

Kontrolle mit dem Taschenrechner:

$\sin(-65°) \approx -0.91$ $\cos(-65°) \approx 0.42$

b) Definition des Tangens für beliebige Winkel

Der Tangens lässt sich als Verhältnis von Sinus und Cosinus darstellen:



$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\tan\alpha}{r} = \frac{\tan\alpha}{1}$$

$\tan\alpha$ wird immer von (1/0) aus gezeichnet: positive Werte in positiver y-Richtung, negative Werte in negativer y-Richtung.

Aufgabe

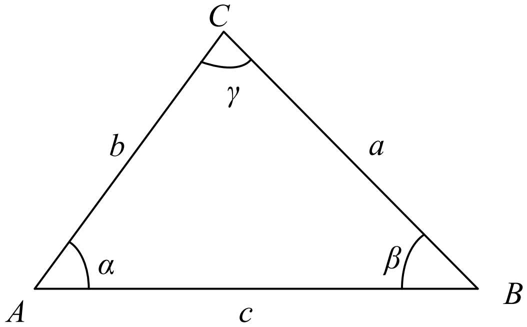
6. Ermittle graphisch (durch zeichnen und messen) die folgenden Werte für den Sinus, Cosinus und Tangens des Winkels α:

a) $\alpha = 110°$ b) $\alpha = 200°$ c) $\alpha = -70°$

Kontrolliere deine Ergebnisse mit dem Taschenrechner!

c) Sinus- und Cosinussatz

In jedem beliebigen Dreieck gilt:



Sinussatz:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$$

Cosinussatz:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\alpha$$

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos\beta$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos\gamma$$

d) Berechnungen im allgemeinen Dreieck

Musterbeispiel 1:

Gegeben sind: $\alpha=31.12°$, a = 4.72 cm, b = 7.16 cm.
Berechne die fehlenden Seiten und Winkel!

Ein Dreieck ist gemäss dem Kongruenzsatz (Ssw) eindeutig bestimmt, falls der Winkel gegeben ist, der der grösseren Seite gegenüberliegt. Dies ist hier nicht der Fall, deshalb gibt es 2 Lösungen.

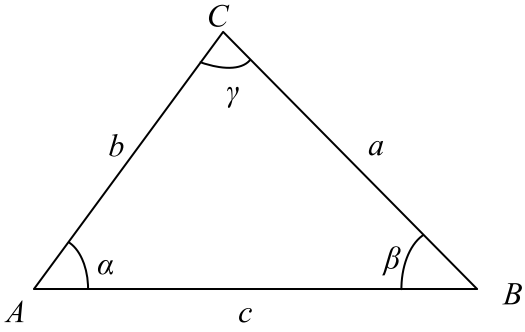
$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}$$ (nach β auflösen)

$$\sin\beta=\frac{b\cdot\sin\alpha}{a}\quad\Rightarrow\quad\beta_1=\arcsin\left(\frac{b\cdot\sin\alpha}{a}\right)\approx 51.63°\qquad\beta_2=180°-\beta_1\approx 128.37°$$ (S. 16)

$$\gamma_1=180°-\alpha-\beta_1\approx 97.25°\qquad\gamma_2=180°-\alpha-\beta_2\approx 20.51°$$

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{c}{\sin\gamma}\quad\Rightarrow\quad c_1=\frac{a\cdot\sin\gamma_1}{\sin\alpha}\approx 9.06\,\text{cm}\qquad c_2=\frac{a\cdot\sin\gamma_2}{\sin\alpha}\approx 3.20\,\text{cm}$$

Musterbeispiel 2:



Gegeben sind: $\beta = 95.67°$, a = 8.04 cm, c = 7.53 cm.
Berechne die fehlenden Seiten und Winkel!

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$$

$$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta} \approx 11.55\,\text{cm}$$

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \;\Rightarrow\; \sin\gamma = \frac{c \cdot \sin\beta}{b} \;\Rightarrow\; \gamma = \arcsin\left(\frac{c \cdot \sin\beta}{b}\right) \approx 40.47°$$

$$\gamma = 180° - \alpha - \beta \approx 43.86°$$

e) Aufgaben

7. Berechne die fehlenden Seiten und Winkel!
a) Gegeben sind: $\gamma = 103.89°$, a = 10.36 cm und b = 9.22 cm.
b) Gegeben sind: a = 11.92 cm, $\beta = 26.09°$ und $\gamma = 76.5°$.
c) Gegeben sind: a = 3.95 cm, b = 5.11 cm und c = 4.58 cm.
(Ausführliche Lösung zu c) im Lösungsteil)

II. Trigonometrische Funktionen

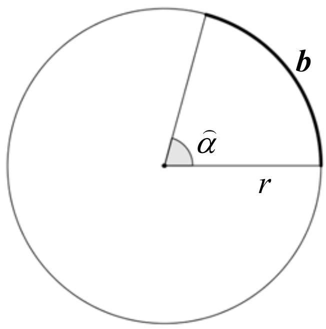
1. Bogenmass

a) Definition:

Definition:

Das Bogenmass ist definiert als:

$$\widehat{\alpha} = \frac{\text{Bogenlänge}}{\text{Radius}}$$



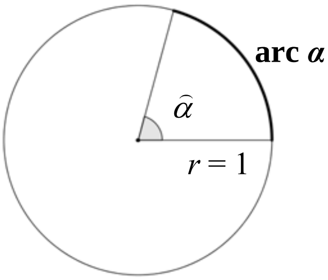
Im Einheitskreis entspricht das Bogenmass der Länge des Kreisbogens (da r = 1).

$$\widehat{\alpha} = \frac{b}{r} = \frac{b}{1} = b$$

b) Umrechnung Gradmass-Bogenmass

Der Umfang des Einheitskreises (Kreis mit Radius $r = 1$) ist $U = 2r\pi = 2\pi$.

Daher entspricht der volle Winkel 360° dem Wert 2π im Bogenmass.

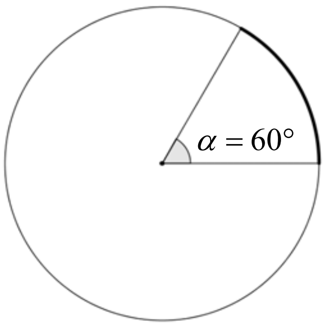


$$\text{arc }\alpha = \underbrace{2\pi}_{\text{Umfang des Einheitskreises}} \cdot \overbrace{\frac{\alpha}{360°}}^{\text{Anteil des Umfangs}} = \frac{\pi}{180°}\cdot\alpha$$

Umrechnungsformeln: $\boxed{\text{arc }\alpha = \frac{\pi}{180°}\cdot\alpha}$ und $\boxed{\alpha = \frac{180°}{\pi}\cdot(\text{arc}\,\alpha)}$

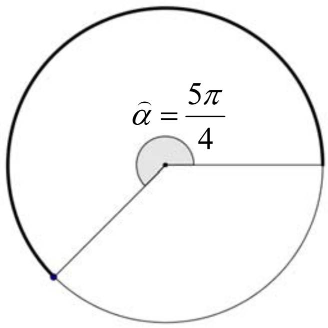
Beispiele: Rechne den gegebenen Winkel in das andere Winkelmass um.

1)



$$\text{arc}\,\alpha = \frac{\pi}{180°}\cdot 60° = \frac{\pi}{3}$$

2)



$$\alpha = \frac{180°}{\pi}\cdot\frac{5\pi}{4} = 225°$$

c) Aufgaben

8. Vervollständige die unten stehende Tabelle (der im Beispiel 1 ausgerechnete Wert wurde schon eingetragen).

α	0°	30°		60°		120°			360°
arc α			$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$		π	$\frac{3\pi}{2}$	

2. Definition und Graphen der trigonometrischen Funktionen

a) Definition und Graph der Sinus- und Cosinusfunktion

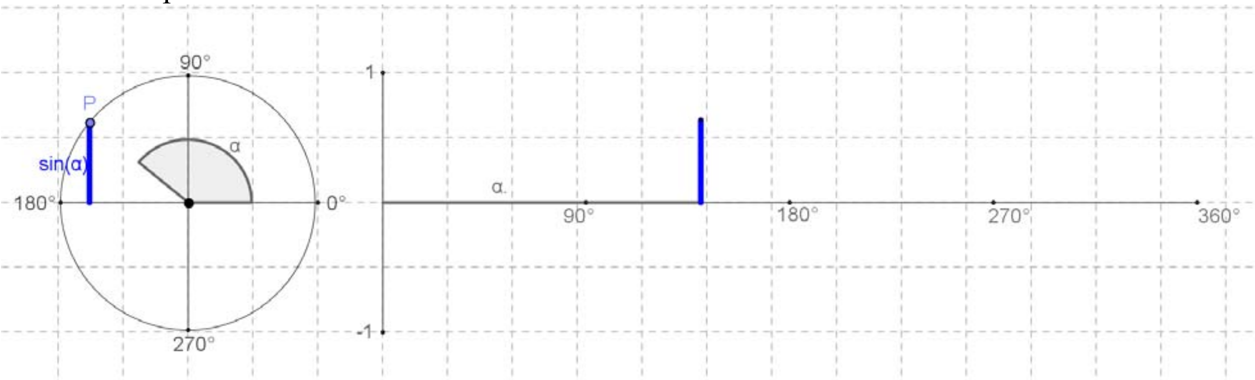
Sinus und Cosinus können als Funktionen definiert werden.

Sinus:	$\mathbb{R} \to [-1;1]$	Cosinus:	$\mathbb{R} \to [-1;1]$
	$\alpha \mapsto \sin\alpha$		$\alpha \mapsto \cos\alpha$

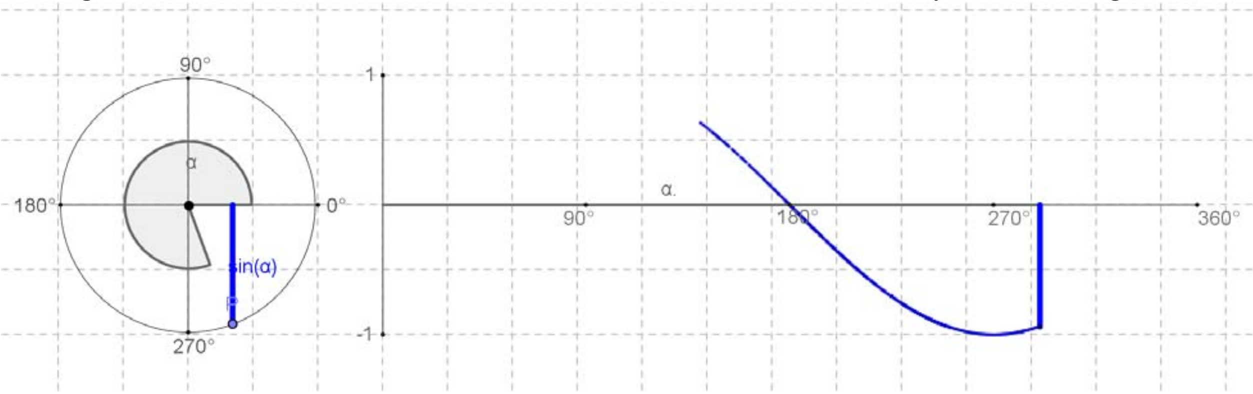
Der Definitionsbereich beider Funktionen sind die reellen Zahlen (die Funktionen sind für beliebige Winkel definiert); der Wertebereich ist $[-1;1]$ (d. h. Sinus und Cosinus nehmen Werte zwischen -1 und 1 an).

Die Werte des Sinus können am Einheitskreis abgelesen werden und in ein Koordinatensystem abgetragen werden. (Die Winkel werden auf der x-Achse abgetragen: 60° auf der x-Achse entspricht $\frac{\pi}{3}$, dies entspricht einer Einheit auf der y-Achse).

Die ist exemplarisch für den Sinuswert des Winkels $\alpha = 140°$

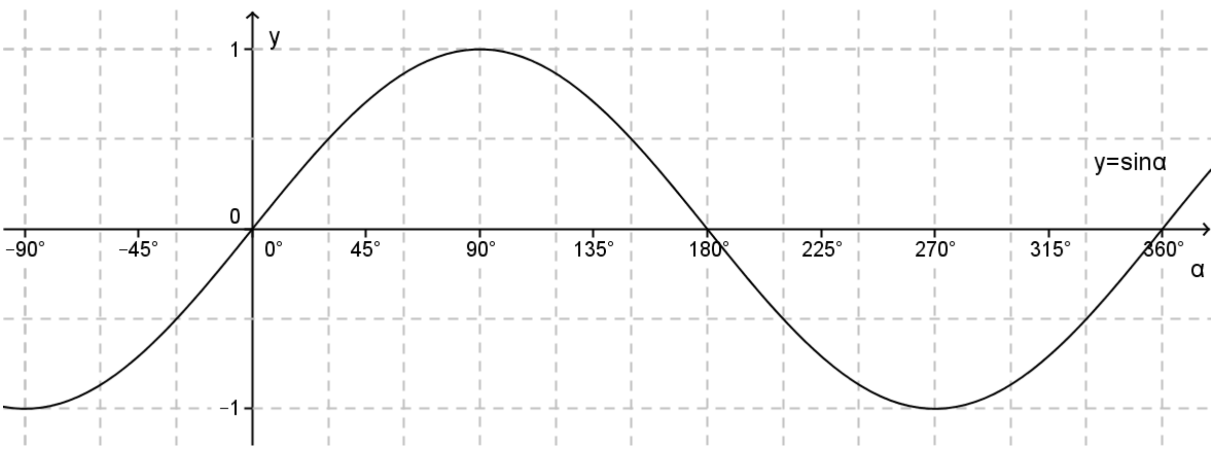


Analog werden die Winkel von $\alpha = 140°$ bis $\alpha = 290°$ ins Koordinatensystem übertragen:



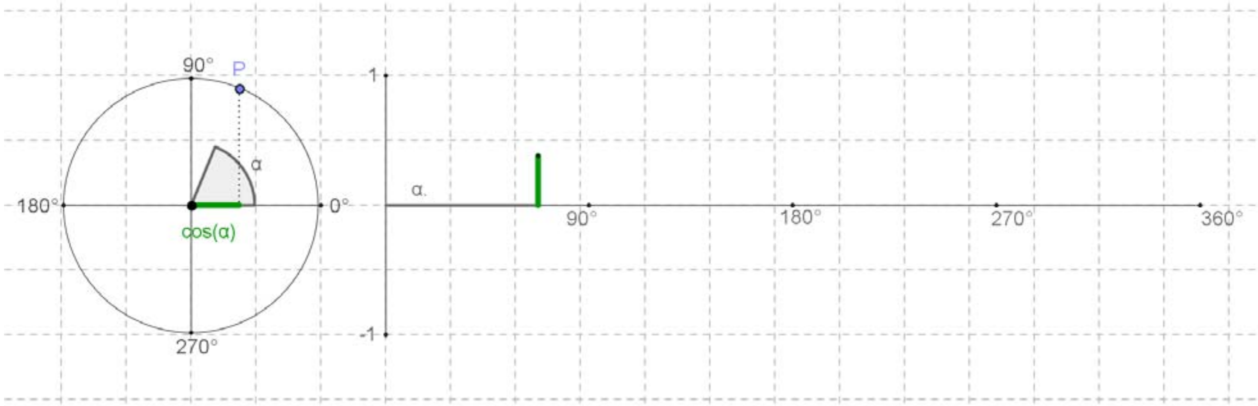
(siehe auch http://www.geogebra.org/de/examples/trigo_einheitskreis/einheitskreis1.html)

Dies ergibt für Sinus den Graphen:

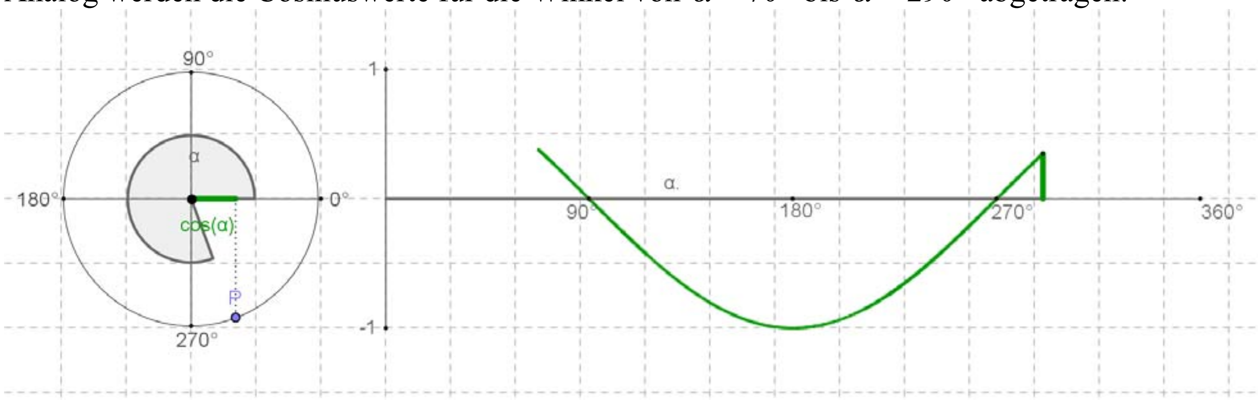


Analog dazu können die Werte des Cosinus am Einheitskreis abgelesen werden und in ein Koordinatensystem übertragen werden.

Wiederum ist dieser Vorgang exemplarisch für $\alpha = 70°$ dargestellt:



Analog werden die Cosinuswerte für die Winkel von $\alpha = 70°$ bis $\alpha = 290°$ abgetragen:



Dies ergibt für Cosinus den Graphen:

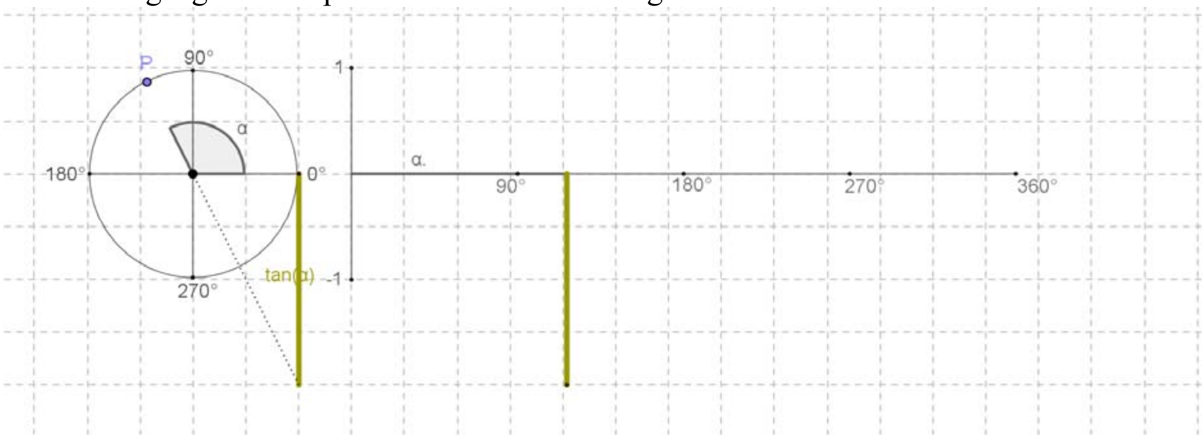
b) Definition und Graph der Tangensfunktion

Der Tangens $\left(\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)$ ist nicht definiert, falls $\cos\alpha = 0$:

Tangens:	$\mathbb{R}\backslash\{\alpha \mid \alpha = 90° + k\cdot 180°, k\in\mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$	(alle Werte von α, für die $\cos\alpha = 0$ ergibt, werden aus dem Definitionsbereich ausgeschlossen)
	$\alpha \mapsto \tan\alpha$	

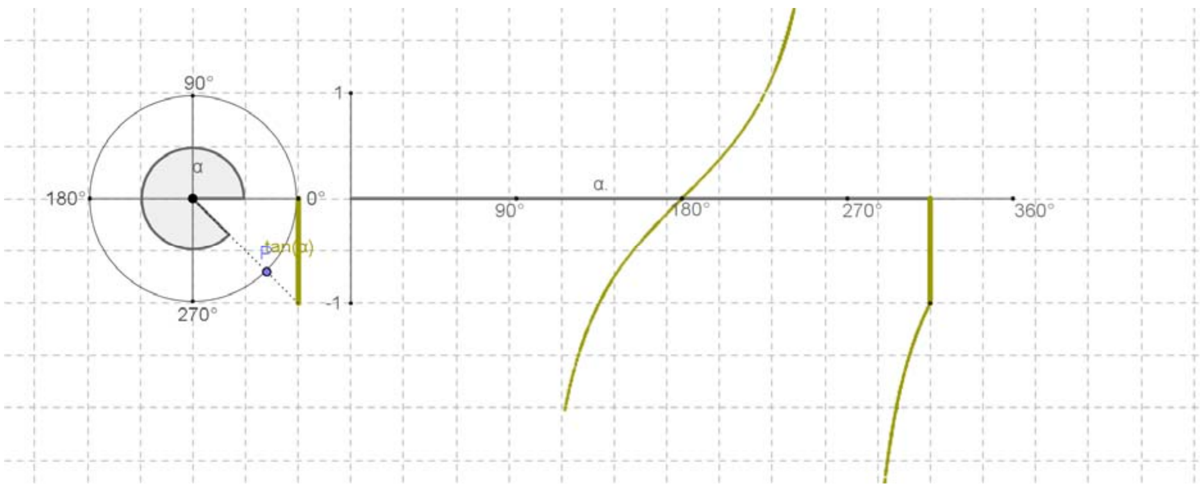
Die Werte des Tangens können rechts vom Einheitskreis abgelesen werden (siehe Definition des Tangens) und in ein Koordinatensystem übertragen werden

Dieser Vorgang ist exemplarisch für $\alpha = 115°$ dargestellt:

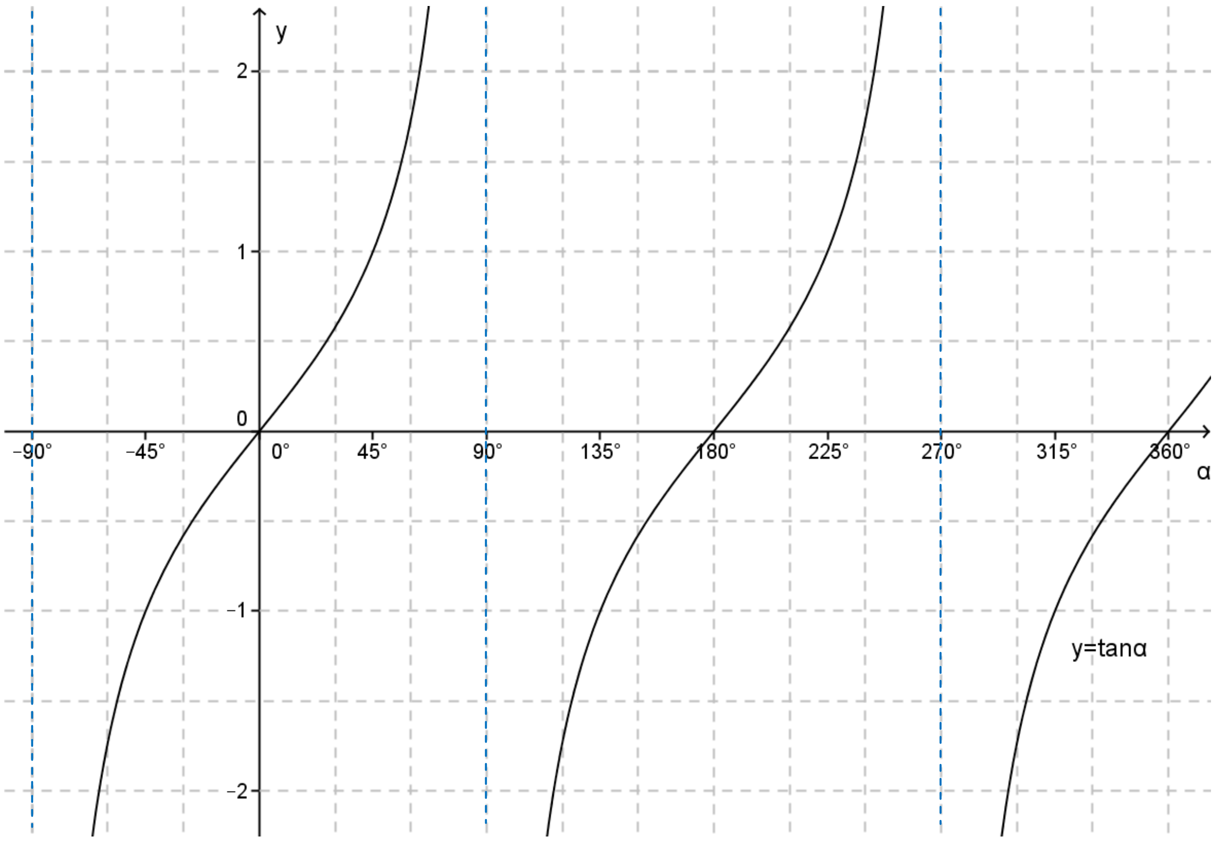


Da $\sin(115°)$ positiv und $\cos(115°)$ negativ ist, ist $\tan(115°) = \dfrac{\sin(115°)}{\cos(115°)}$ auch negativ.

Analog werden die Tangenswerte der Winkel von $\alpha = 115°$ bis $\alpha = 315°$ ermittelt.



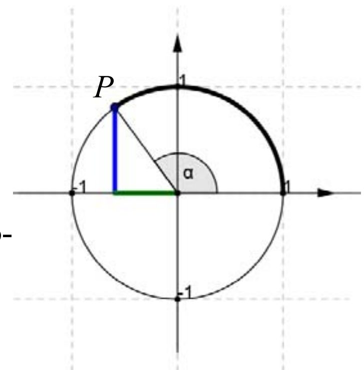
Dies ergibt für den Tangens den Graphen:



3. Symmetrieeigenschaften der Graphen

a) Periode

Merke: Die Graphen von Sinus und Cosinus sind periodisch mit einer Periode von 360°.



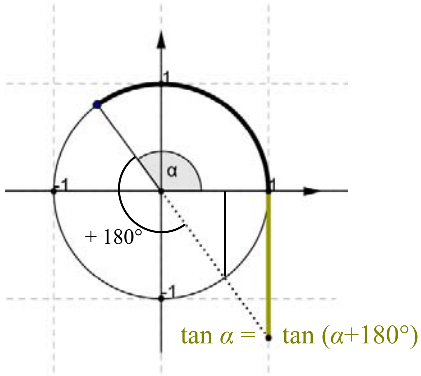
Formal: $\sin(\alpha + 360°) = \sin\alpha$ und $\cos(\alpha + 360°) = \cos\alpha$

Begründung: Nach einer zusätzlichen Drehung um 360° ist der Punkt P wieder in der ursprünglichen Position, somit bleiben der Sinus- und Cosinuswert gleich.

Merke: Der Graph von Tangens ist periodisch mit einer Periode von 180°.

Formal: $\tan(\alpha + 180°) = \tan\alpha$

Begründung: Nach einer halben Kreisdrehung nimmt der Tangens wieder denselben Wert an wie zuvor!



b) Punkt- und Achsensymmetrie

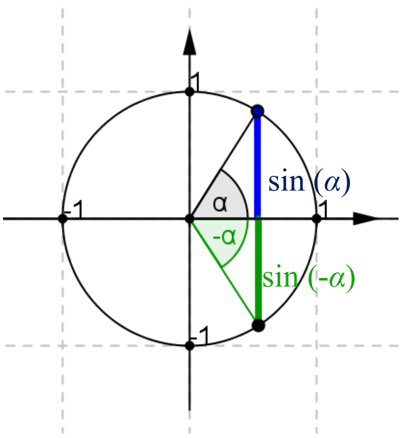
Merke: Die Graphen der Sinus- und Tangensfunktion sind punktsymmetrisch zum Ursprung.

Formal: $\sin(-x) = -\sin(x)$ $\tan(-x) = -\tan(x)$

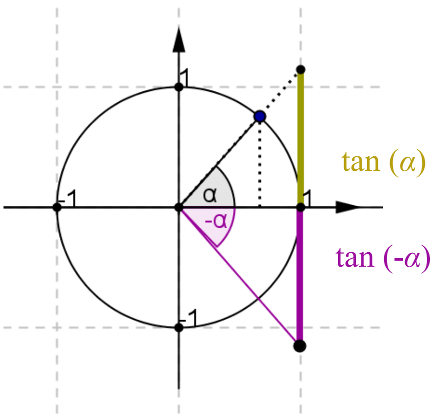
Merke: Der Graph der Cosinusfunktion ist symmetrisch zur y-Achse).

Formal: $\cos(-x) = \cos(x)$

Diese Symmetrieeigenschaften sind sehr schön an den Graphen erkennbar (siehe vorheriges Kapitel). Ebenso lässt sich die Gültigkeit der Formeln schön am Einheitskreis zeigen.



$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$



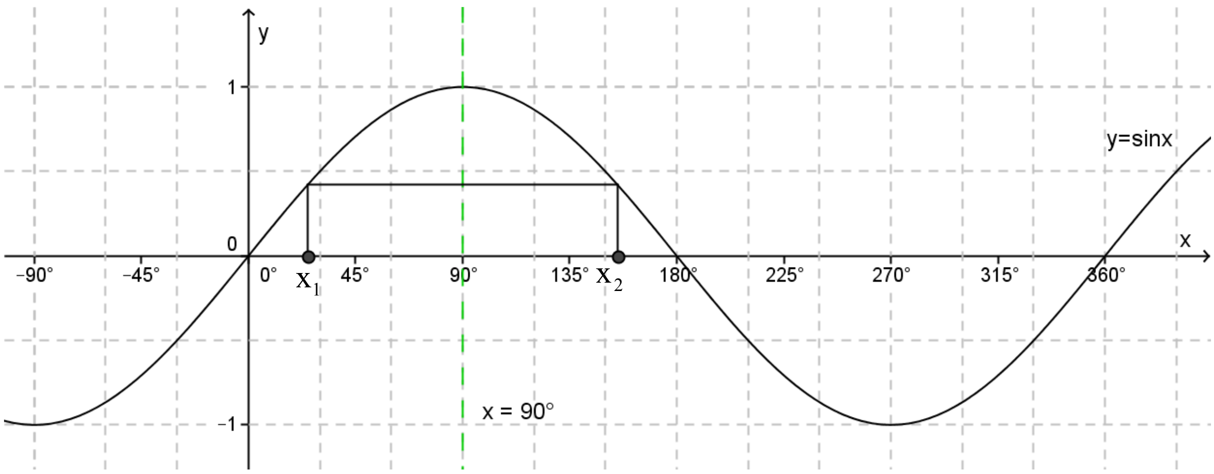
$\tan(-x) = -\tan(x)$

Merke: Der Graph der Sinusfunktion ist symmetrisch zur Geraden $x = 90°$.

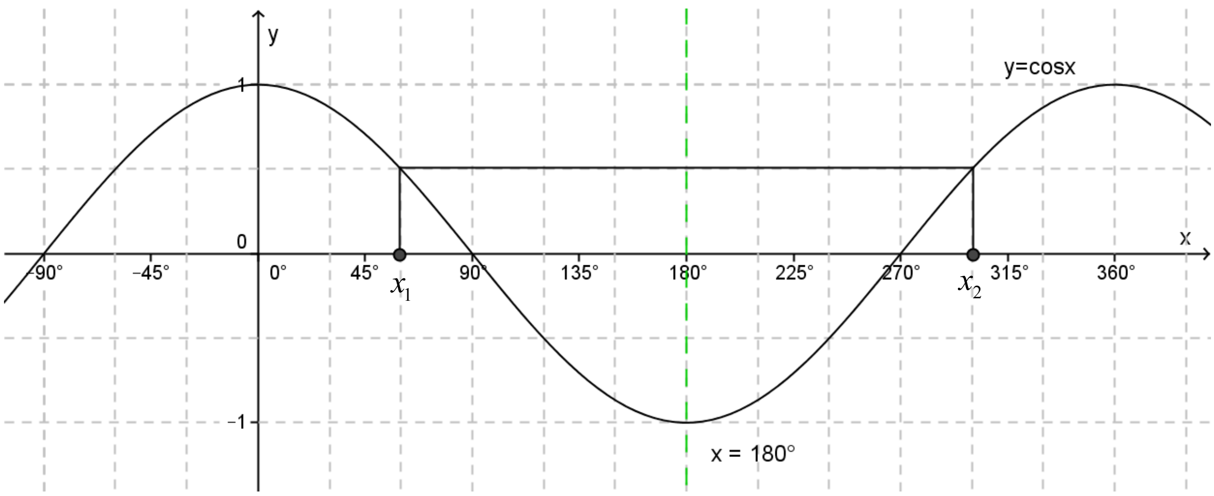
Formal: $\sin(x) = \sin(180° - x)$

Merke: Der Graph der Cosinusfunktion ist symmetrisch zur Geraden $x = 180°$.

Formal: $\cos(x) = \cos(360° - x)$



$$\sin x_1 = \sin x_2 = \sin(180° - x_1)$$



$$\cos x_1 = \cos x_2 = \cos(360° - x_1)$$

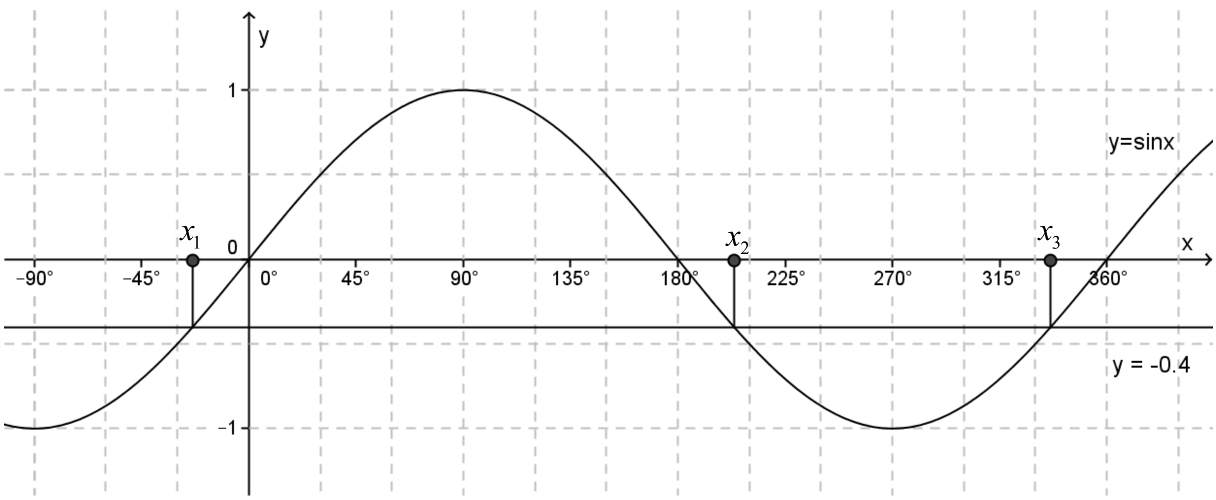
4. Trigonometrische Gleichungen

Vorbemerkung: In diesem Kapitel werden Lösungen für trigonometrische Gleichungen nur für Winkel zwischen 0° und 360° bestimmt.

a) Musteraufgaben

1. Aufgabe: Bestimme alle Winkel x zwischen 0° und 360°, für die gilt: $\sin(x) = -0.4$.

Graphisch entspricht dies den Schnittpunkten der Graphen $y = \sin(x)$ und $y = -0.4$:



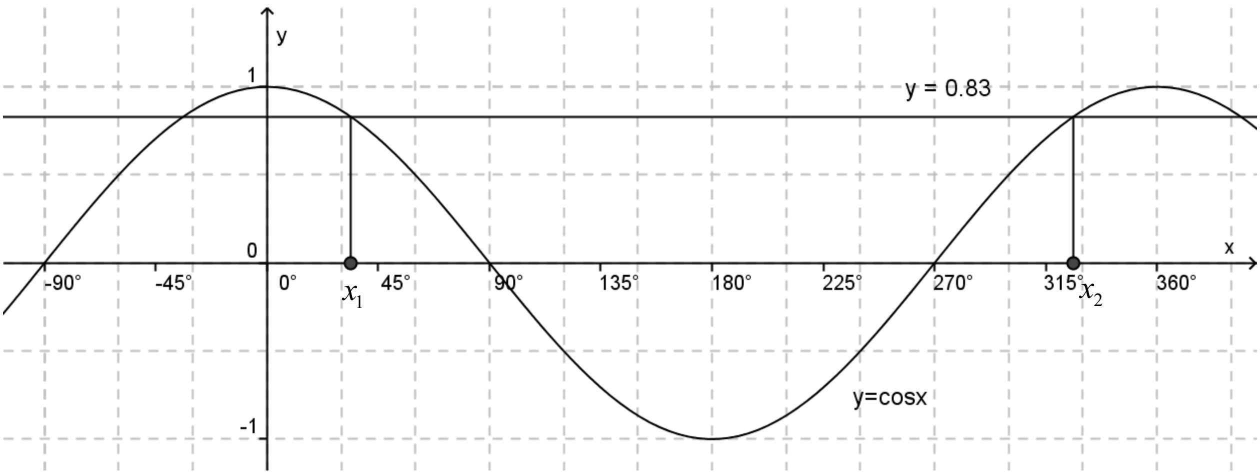
Lösung:

$x_1 = \arcsin(-0.4) \approx -23.58°$ (dieser Winkel liegt nicht im angegebenen Bereich)

$x_2 = 180° - x_1 \approx 203.58°$ $\sin(x) = \sin(180° - x)$

$x_3 = x_1 + 360° \approx 336.42°$ Periode beim Sinus

2. Aufgabe: Bestimme alle Winkel x zwischen 0° und 360°, für die gilt: $\cos(x) = 0.83$.



Lösung:

$x_1 = \arccos(0.83) \approx 33.90°$

$x_2 = 360° - x_1 \approx 326.10°$ $\qquad \cos(x) = \cos(360° - x)$

b) Aufgaben

9. Bestimme alle Winkel x zwischen 0° und 360°, für die gilt:

a) $\sin x = 0.2$ b) $\sin x = -0.74$ c) $\cos x = 0.84$

d) $\cos x = -0.05$ e) $\tan x = 21$ f) $\tan x = -0.51$

5. Einfluss der Parameter auf die Graphen

a) Musterbeispiele

Am Beispiel der Sinusfunktion sollen die verschiedenen Parameter und ihre Wirkung gezeigt werden.

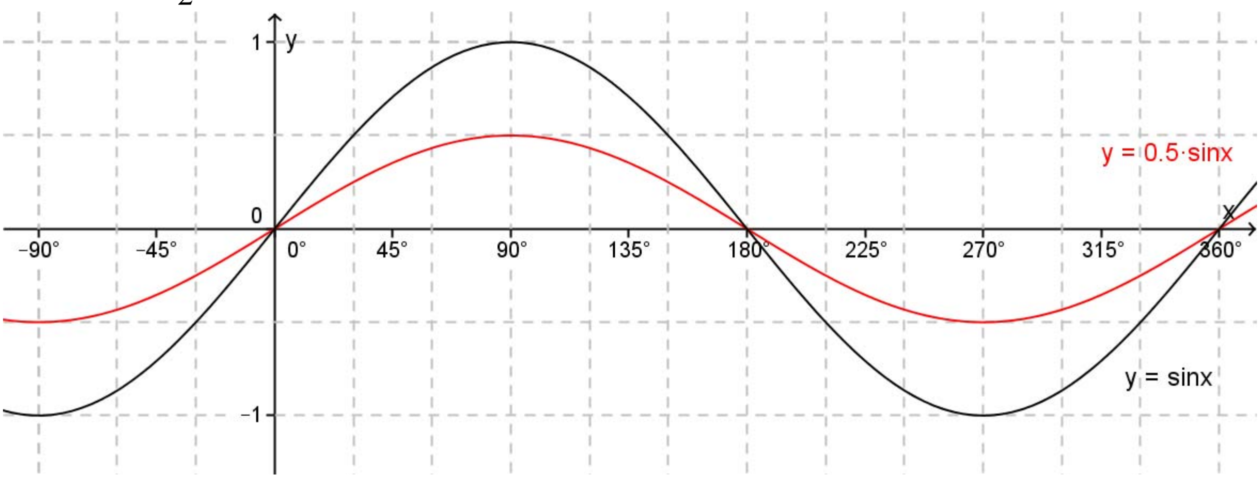
Die allgemeinste Form einer Sinusfunktion sieht folgendermassen aus: $y = a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d$

Als Musterbeispiel werden wir den Graphen der Funktion $y = f(x) = \frac{1}{2} \cdot \sin(2x + 30°) - 1$ zeichnen. Der Einfluss der Parameter wird zuerst einzeln untersucht, dann setzen wir die Ergebnisse zusammen und zeichnen den Graphen von $y = f(x)$.

1. Funktionen der Art: $y = a \cdot \sin(x)$

Der Parameter a bewirkt eine Streckung / Stauchung in y-Richtung. Der Wertebereich der Funktion ist neu: $[-a\,;a]$.

Beispiel: $y = \frac{1}{2} \cdot \sin(x)$

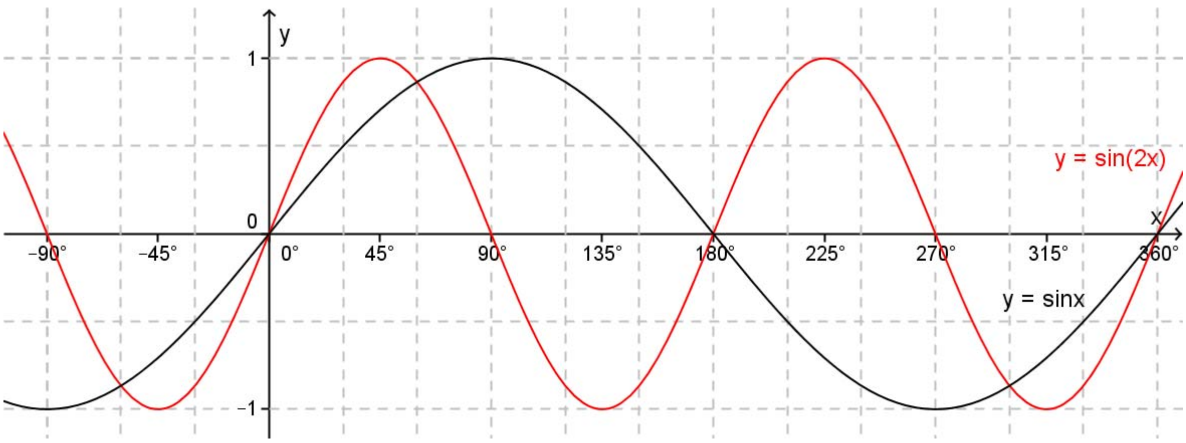


Die Funktion wird mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ gestaucht. Der Wertebereich ist: $W = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$

2. Funktionen der Art: $y = \sin(b \cdot x)$

Der Parameter *b* bewirkt eine Streckung / Stauchung in *x*-Richtung. Die Periode der Funktion beträgt neu $\dfrac{360°}{b}$.

Beispiel: $y = \sin(2x)$

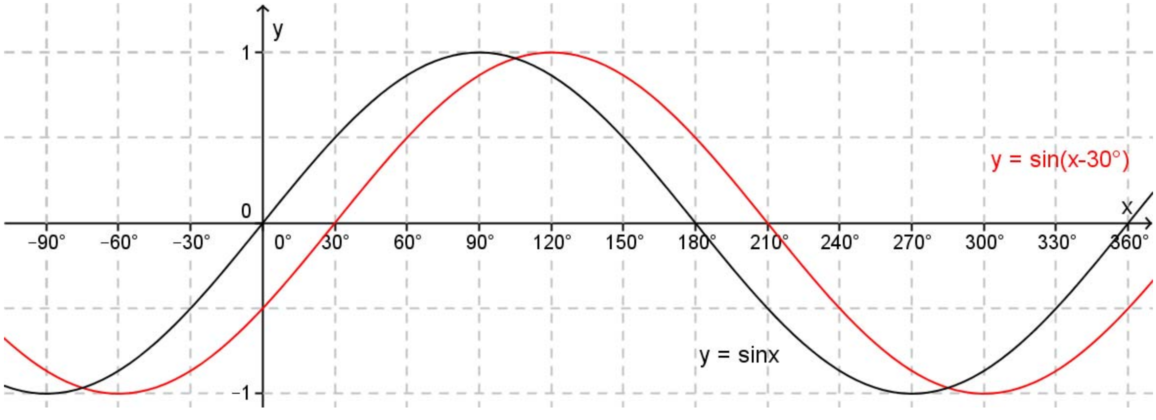


Wenn *x* die Werte von 0° bis 360° durchläuft (eine Periode in $y = \sin(x)$), durchlaufen die Argumente der Funktion $y = \sin(2x)$ die Werte von 0° bis 720° (also zwei Perioden). Deshalb ist die Periodenlänge der Funktion $\dfrac{360°}{b} = \dfrac{360°}{2} = 180°$, wie man am Graphen sehr schön sieht.

3. Funktionen der Art: $y = \sin(x + c)$

Der Parameter *c* bewirkt eine Verschiebung in negative *x*-Richtung, wenn *c* positiv ist, wenn *c* negativ ist, wird der Graph in positiver *x*-Richtung verschoben.

Beispiel: $y = \sin(x - 30°)$



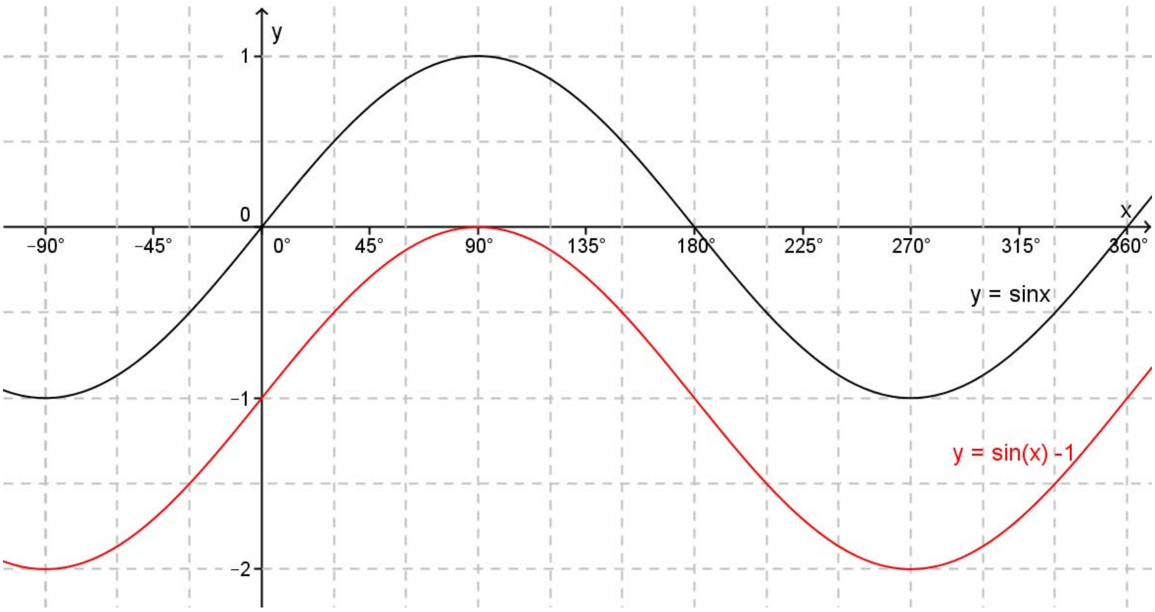
Die Funktion $y=\sin(x)$ schneidet die x-Achse im Ursprung, da $0=\sin(0°)$. Derselbe Schnittpunkt mit der *x*-Achse wird von $y=\sin(x-30°)$ bei $x=30°$ erreicht, da $\sin(30°-30°)=\sin(0°)=0$. Der ganze Graph ist also um 30° in positiver *x*-Richtung verschoben. Falls *c* positiv ist, wird der Graph um c in negativer *x*-Richtung verschoben.

Falls beide Parameter *b* und *c* vorkommen: $y=\sin(b\cdot x+c)$, sollte die Funktion dargestellt werden als: $y=\sin(b\cdot(x+c'))$, da die Stauchung auch einen Einfluss auf die Horizontalverschiebung hat (der Graph wird dann wie oben beschrieben um c' verschoben).

4. Funktionen der Art: $y=\sin(x)+d$

Der Parameter *d* bewirkt eine Verschiebung in positiver *y*-Richtung. Der Wertebereich der Funktion ist neu: $[-1+d;1+d]$.

Beispiel: $y=\sin(x)-1$

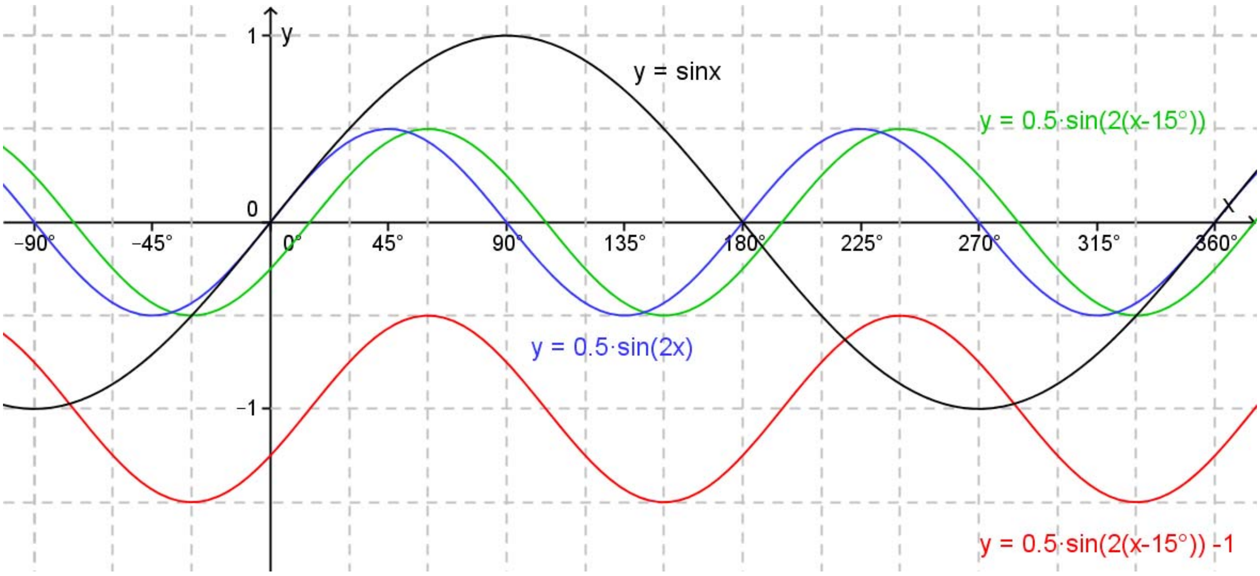


Die Funktion wird um 1 Einheit in negativer *y*-Richtung verschoben.
Der Wertebereich ist: $W=[-1-1;1-1]=[-2;0]$

Graphen können mit dem folgenden Applet direkt gezeichnet und das Verhalten der Parameter mittels Schieberegler ausprobiert werden (Darstellung im Bogenmass (siehe Kapitel II.1; Rolle von *c* und *d* vertauscht):

http://www.geogebra.org/de/upload/files/dynamische_arbeitsblaetter/klement/TrigoFkt/AllgemeineSinusFunktion.html

Zusammengesetzt ergibt das für $y = f(x) = \frac{1}{2} \cdot \sin(2x - 30°) - 1 = \frac{1}{2} \cdot \sin(2(x - 15°)) - 1$



Der Definitionsbereich ist D = $\mathbb{R}$, der Wertebereich $W = [-1.5; -0.5]$ und die Periode 180°.

b) Aufgaben

10. Zeichne die Graphen der untenstehenden Funktionen, gib jeweils Definitions- und Wertebereich sowie die Periodenlänge an.

a) $y = 2 \cdot \cos(x)$ b) $y = \cos(x + 45°)$ c) $y = 2 \cdot \cos\left(\frac{1}{2}x + 45°\right) + \frac{1}{2}$

d) $y = \tan\left(\frac{1}{2}x\right)$ e) $y = \tan(x) - 2$ f) $y = \frac{1}{3} \cdot \tan\left(\frac{1}{2}x - 45°\right) - 2$

Kantonale Fachschaft Mathematik

Lösungen der Aufgaben

1. a) $\sin\delta = \dfrac{d}{f}$ $\cos\varepsilon = \dfrac{d}{f}$ $\tan\varepsilon = \dfrac{e}{d}$

b) $\sin\alpha = \dfrac{h_c}{b} = \dfrac{a}{c}$ $\cos\beta = \dfrac{q}{a} = \dfrac{a}{c}$ $\tan\alpha = \dfrac{h_c}{p}$, $\tan\beta = \dfrac{h_c}{q}$

2. a) 0.17 b) 0.91 c) 0.94 d) 0.91 e) 0.58 f) 11.43

3. a) 30° b) 60.00° c) 82.78°

d) 45° e) 15.00° f) 71.37°

4. $b \approx 6.16\,cm$, $\alpha \approx 39.70°$, $\beta \approx 50.30°$.

5. $\tan\gamma = \dfrac{h_a}{p} \quad\Rightarrow\quad \gamma = \arctan\left(\dfrac{h_a}{p}\right) \approx 59.20°$

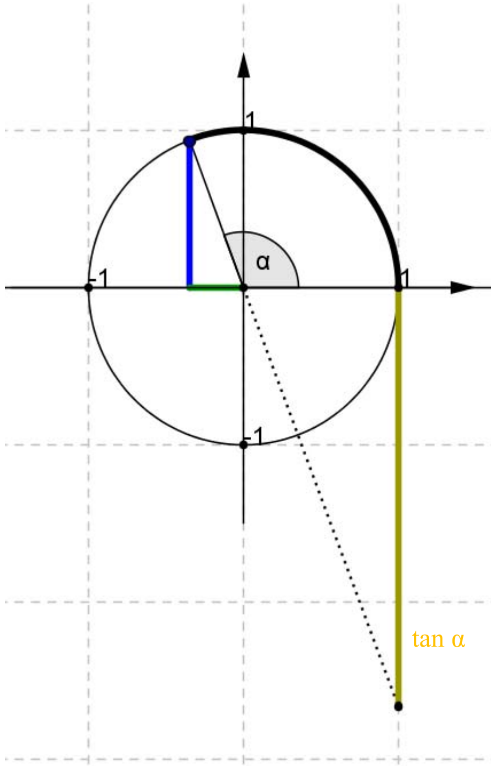
$\cos\gamma = \dfrac{p}{b} \quad\Rightarrow\quad b = \dfrac{p}{\cos\gamma} \approx 6.05\,\text{cm}$ oder: $\boxed{b = \sqrt{p^2 + h_a^{\,2}}}$

$\tan\gamma = \dfrac{c}{b} \quad\Rightarrow\quad c = b \cdot \tan\gamma \approx 10.15\,\text{cm}$

$\tan\beta = \dfrac{b}{c} \quad\Rightarrow\quad \beta = \arctan\left(\dfrac{b}{c}\right) \approx 30.80°$ oder: $\boxed{\beta = 180° - \alpha - \gamma}$

$\cos\beta = \dfrac{q}{c} \quad\Rightarrow\quad q = c \cdot \cos\beta \approx 8.72\,\text{cm}$ oder: $\boxed{q = \sqrt{c^2 - h_a^{\,2}}}$

$\cos\beta = \dfrac{c}{a} \quad\Rightarrow\quad a = \dfrac{c}{\cos\beta} \approx 11.82\,\text{cm}$ oder: $\boxed{a = p + q}$



6. a) $\sin(110°) = 0.94$, $\cos(110°) = -0.34$,
$\tan(110°) = -2.75$ (siehe Zeichnung rechts)

b) $\sin(200°) = -0.34$, $\cos(200°) = -0.94$,
$\tan(200°) = 0.36$

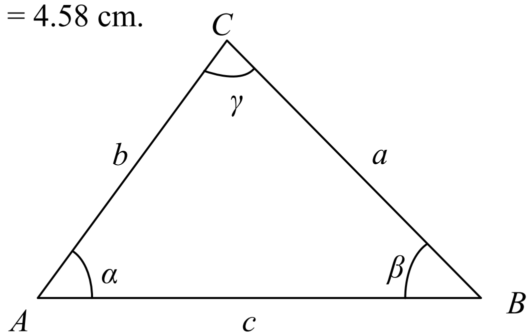
c) $\sin(-70°) = -0.94$, $\cos(-70°) = 0.34$,
$\tan(-70°) = -2.75$

7. a) $\alpha \approx 40.66°$, $\beta \approx 35.45°$ $c \approx 15.43\,\text{cm}$

b) $\alpha = 77.41°$, $b \approx 5.37\,\text{cm}$ und $c \approx 11.88$ cm.

c) Ausführliche Lösung:

Gegeben sind: a = 3.95 cm, b = 5.11 cm und c = 4.58 cm.



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$

$$2bc \cdot \cos\alpha = b^2 + c^2 - a^2$$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) \approx 47.73°$$

Der erste berechnete Winkel (hier α) musste mit Hilfe des Cosinussatzes berechnet werden. Für die Berechnung des zweiten Winkels hätte auch der Sinussatz verwendet werden können, der dritte Winkel könnte auch mit Hilfe der Winkelsumme im Dreieck ermittelt werden.

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \quad \Rightarrow \quad \beta = \arccos\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right) \approx 73.19°$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

$$\sin\gamma = \frac{c \cdot \sin\alpha}{a} \quad \Rightarrow \quad \gamma = \arcsin\left(\frac{c \cdot \sin\alpha}{a}\right) \approx 59.09°$$

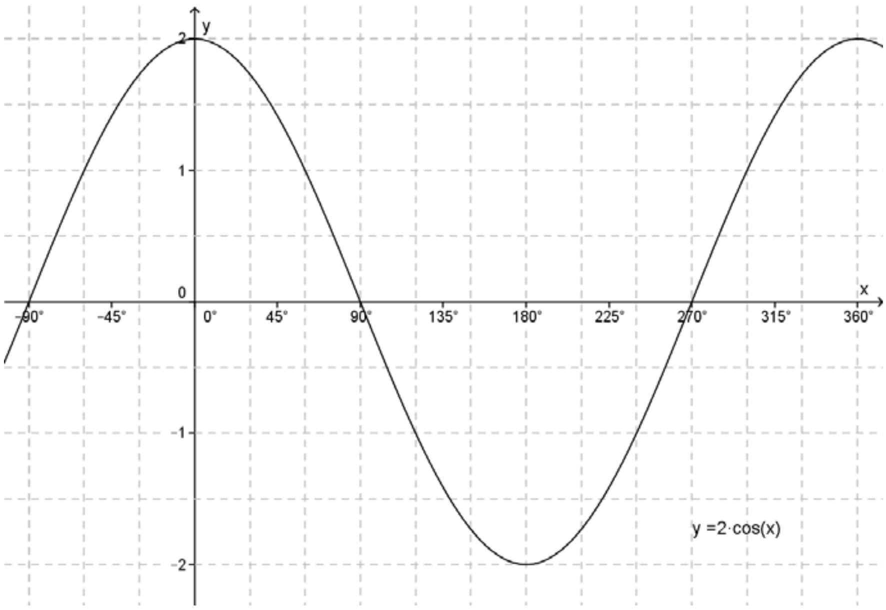
Auf Grund der Rundungen ergibt die Winkelsumme der gerundeten Werte in diesem Fall 180.01°! Addiert man die genauen Werte, erhält man selbstverständlich 180°.

8.

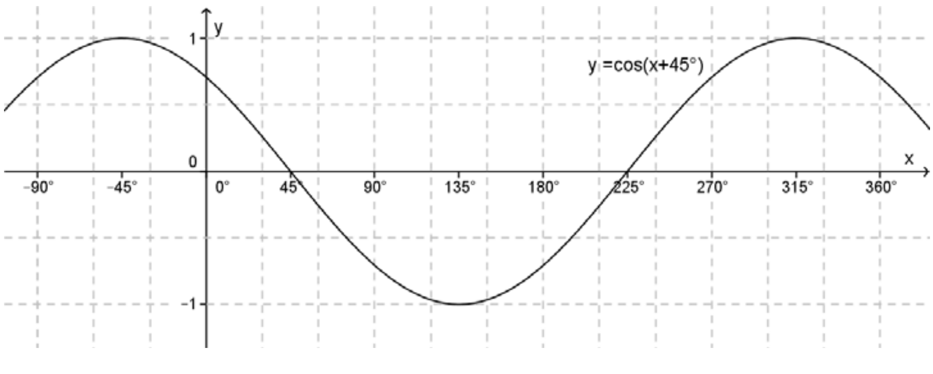
α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	180°	270°	360°
arc α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

9. a) 11.54°, 168.46° b) 227.73°, 312.27° c) 32.86°, 327.14°
d) 92.87°, 267.13° e) 87.27°, 267.27° f) 152.98°, 332.98°

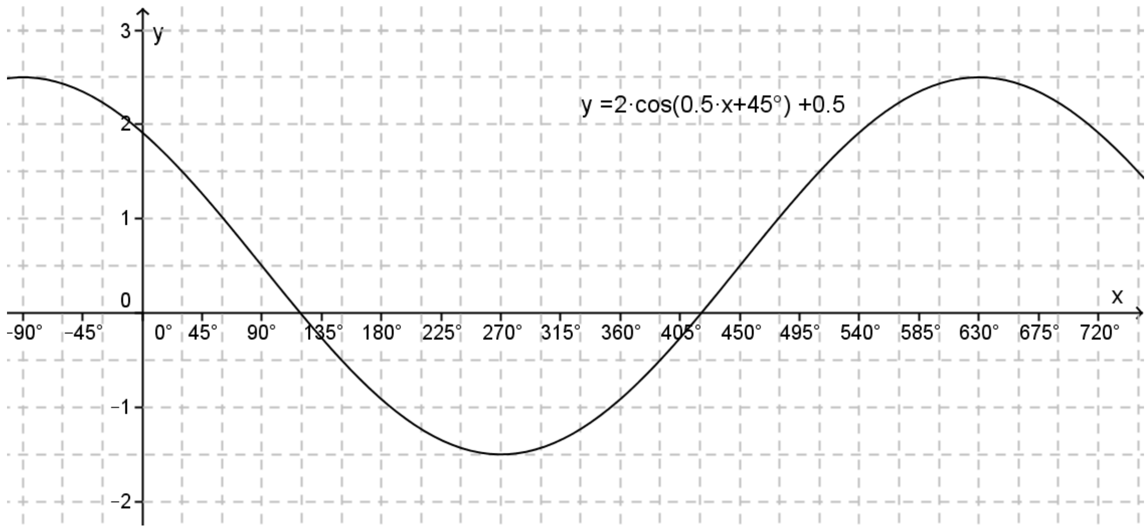
10. a) $y = 2 \cdot \cos(x)$; D = $\mathbb{R}$, W = $[-2; 2]$, P = 360°



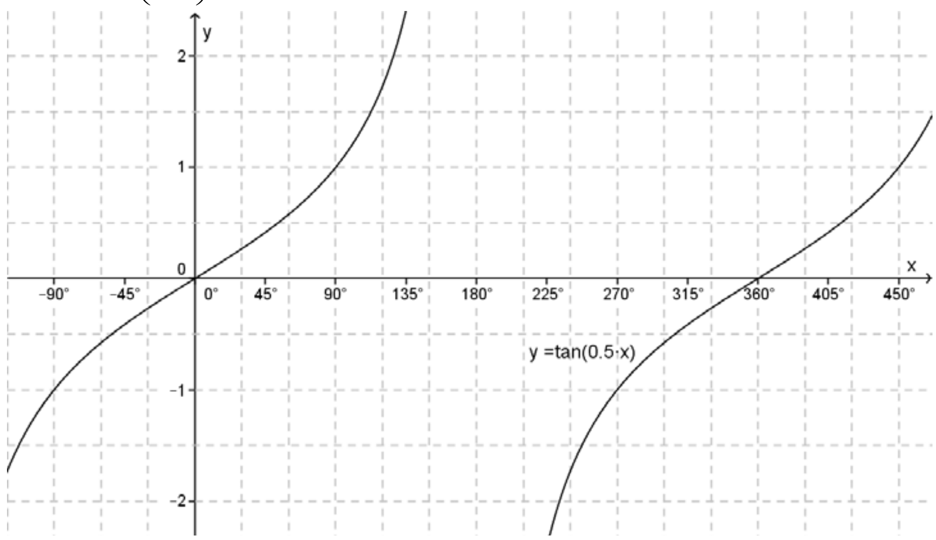
b) $y = \cos(x + 45°)$ D = $\mathbb{R}$, W = $[-1; 1]$, P = 360°



c) $y = 2 \cdot \cos\left(\frac{1}{2}(x + 90°)\right) + \frac{1}{2}$ $\quad$ D = $\mathbb{R}$, W = $[-1.5; 2.5]$, P = 720°

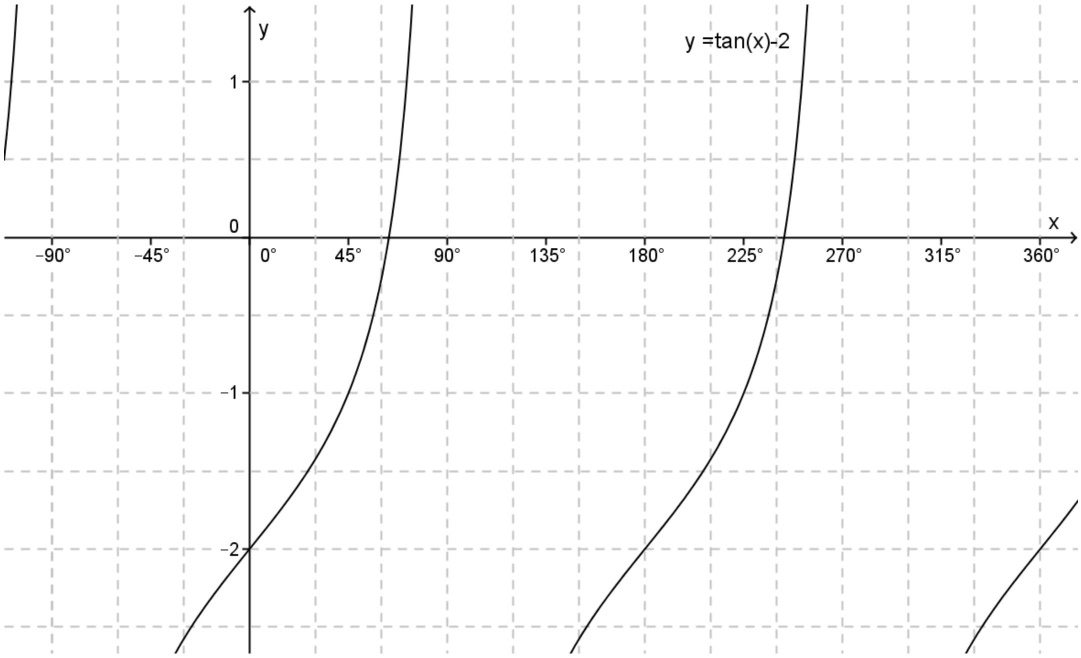


d) $y = \tan\left(\frac{1}{2}x\right)$ $\quad$ $D = \mathbb{R} \setminus \{x \mid x = 180° + k \cdot 360°, k \in \mathbb{Z}\}$, W=$\mathbb{R}$, P = 360°



Die Funktion wird um den Faktor 2 in *x*-Richtung gestreckt. Die Periode verdoppelt sich, dementsprechend ändert sich der Definitionsbereich. Der Wertebereich bleibt unverändert.

e) $y = \tan(x) - 2$ $\quad D = \mathbb{R}\setminus\{x \mid x = 90° + k\cdot 180°, k \in \mathbb{Z}\}$, W=$\mathbb{R}$, P = 180°



Der Graph wird in negative y-Richtung verschoben.
Bei D, W und der Periode gibt es keine Veränderungen.

f) $y = \frac{1}{3}\cdot\tan\left(\frac{1}{2}(x - 90°)\right) - 2$ $\quad D = \mathbb{R}\setminus\{x \mid x = -90° + k\cdot 360°, k \in \mathbb{Z}\}$, W=$\mathbb{R}$, P = 360°