Kantonale Fachschaft Mathematik

Repetitionsaufgaben: Quadratische Gleichungen

Zusammengestellt von Felix Huber, KSR

Lernziele:

- Sie können die Lösungen von quadratischen Gleichungen mit der Lösungsformel von Hand bestimmen.
- Sie wissen, welcher Term in der Lösungsformel die Diskriminante ist, kennen ihre Bedeutung für die Anzahl Lösungen einer quadratischen Gleichung und können dieses Wissen in Aufgaben anwenden.
- Sie können verschiedene Typen von quadratischen Gleichungen unterscheiden. Sie können die Lösungen von reinquadratischen und von gemischt-quadratischen Gleichungen sowie von quadratischen Gleichungen mit ganzzahligen Lösungen auch ohne Lösungsformel von Hand bestimmen.
- Sie können biquadratische Gleichungen durch Substitution in quadratische Gleichungen überführen und so sämtliche Lösungen von Hand bestimmen.
- Sie können die Lösungen von einfachen quadratischen Gleichungen mit Parametern von Hand bestimmen.
- Sie können Textaufgaben lösen, die auf quadratische Gleichungen führen.

Lösungsformel

Die Gleichung

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0$$

wird im Folgenden als Grundform der quadratischen Gleichung bezeichnet.

Die Lösungen einer quadratischen Gleichung lassen sich mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen bestimmen:

$$x_{1,2} = \frac{-\,b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}$$

Beispiel 1:

$$2\,x^2 - 7\,x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad a = 2\,,\; b = -7\,,\; c = 3 \quad \text{(Beachten Sie: b ist hier negativ)}$$

$$\Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-\,(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4} = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{7 \pm 5}{4}$$

$$x_1 = \frac{7+5}{4} = \frac{12}{4} = 3 \quad ; \quad x_2 = \frac{7-5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Beispiel 2:

$$x^2 = 2\,x + 1 \quad \Big|\; -2\,x - 1 \qquad\qquad \text{(Gleichung zuerst auf die Grundform bringen)}$$

$$x^2 - 2\,x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad a = 1,\; b = -2\,,\; c = -1$$

$$\Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-\,(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 \cdot 2}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = \frac{2\left(1 \pm \sqrt{2}\,\right)}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

$$x_1 = 1 + \sqrt{2} \approx 2.4142 \quad ; \quad x_2 = 1 - \sqrt{2} \approx -\,0.4142$$

Beispiel 3:

$$\frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{3}{2} = 0 \quad \Big| \cdot 12$$

Selbstverständlich könnte man auch mit Brüchen arbeiten ($a = 1/6$, $b = -5/4$, $c = 3/2$).
Das führt aber oft zu Fehlern.
Deshalb empfehle ich Ihnen, die Gleichung zuerst mit dem kgV der Nenner zu multiplizieren.

$$2x^2 - 15x + 18 = 0$$

$$\Rightarrow \quad a = 2, \; b = -15, \; c = 18$$

$$\Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-(-15) \pm \sqrt{(-15)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 18}}{2 \cdot 2} = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 144}}{4} = \frac{15 \pm \sqrt{81}}{4} = \frac{15 \pm 9}{4}$$

$$x_1 = \frac{15 + 9}{4} = \frac{24}{4} = 6 \quad ; \quad x_2 = \frac{15 - 9}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden quadratischen Gleichungen in den Aufgaben 1 bis 5 mit Hilfe der Lösungsformel. Vereinfachen Sie soweit wie möglich.

Aufgabe 1: $2x^2 - x - 6 = 0$

Aufgabe 2: $5x^2 - 4 = -8x$

Aufgabe 3: $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{6} = 0$

Aufgabe 4: $-9x^2 - 54x - 63 = 0$

Aufgabe 5: $9y^2 + 9y + 0.25 = 0$

Diskriminante und Anzahl Lösungen

Beispiel 4:

$$5x^2 - 8x + 4 = 0$$

$$\Rightarrow \quad a = 5,\ b = -8,\ c = 4$$

$$\Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 4}}{2 \cdot 5} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 80}}{10} = \frac{8 \pm \sqrt{-16}}{4}$$

Die Wurzel aus einer negativen Zahl können wir nicht ziehen. Diese Gleichung hat deshalb keine Lösungen.

Beispiel 5:

$$-x^2 + 70x - 1225 = 0$$

$$\Rightarrow \quad a = -1,\ b = 70,\ c = -1225$$

$$\Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-70 \pm \sqrt{70^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1225)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-70 \pm \sqrt{4900 - 4900}}{-2} = \frac{-70 \pm \sqrt{0}}{-2}$$

Die Wurzel aus 0 ist 0. Das hat zur Folge, dass die beiden Lösungen zusammenfallen, dass also die Gleichung genau eine Lösung hat:

$$x_{1,2} = \frac{-70 \pm 0}{-2} \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2 = \frac{-70}{-2} = 35$$

Fazit: Die Anzahl Lösungen einer quadratischen Gleichung hängen vom Term $b^2 - 4ac$ unter der Wurzel in der Lösungsformel ab. Dieser Term wird *Diskriminante D* genannt:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

D

$$D = b^2 - 4ac$$

$D > 0 \quad \Rightarrow$ 2 Lösungen (vgl. Beispiele 1 bis 3)

$D = 0 \quad \Rightarrow$ 1 Lösung (vgl. Beispiel 5) : $x_1 = x_2 = x = \dfrac{-b \pm 0}{2a} = \dfrac{-b}{2a}$

$D < 0 \quad \Rightarrow$ keine Lösung (vgl. Beispiel 4)

Beispiel 6: Bestimmen Sie mit Hilfe der Diskriminante die Anzahl Lösungen der Gleichung $2x^2 - x + 3 = 0$.

Lösung:

$a = 2,\ b = -1,\ c = 3$

$D = b^2 - 4ac$

$D = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 1 - 24 = -23 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Keine Lösung}$

Beispiel 7: Für welche Werte des Parameters u hat die Gleichung $x^2 + 2x + 3u = 0$ genau eine Lösung? Wie lautet dann diese Lösung?

Lösung:

$a = 1,\ b = 2,\ c = 3u$

$D = 0$

$b^2 - 4ac = 0$

$2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3u = 0 \quad \Big| + 12u \quad \Big| : 12 \quad \Rightarrow \quad u = \frac{1}{3}$

$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2 \cdot 1} = -1$

Bestimmen Sie in den Aufgaben 6 bis 8 mit Hilfe der Diskriminante die Anzahl Lösungen:

Aufgabe 6: $4x^2 + 12x + 9 = 0$

Aufgabe 7: $6x^2 - 19x + 15 = 0$

Aufgabe 8: $16x^2 + 25x + 10 = 0$

Bestimmen Sie in den Aufgaben 9 und 10 den Wert des Parameters u so, dass die Gleichung genau eine Lösung hat. Geben Sie auch die Lösung an.

Aufgabe 9: $2x^2 - 3x + u = 0$

Aufgabe 10: $x^2 + 2ux + 4 = 0$

Bestimmung der Lösungen von quadratischen Gleichungen ohne Lösungsformel

Oftmals lassen sich die Lösungen von quadratischen Gleichungen ohne Lösungsformel viel unkomplizierter bestimmen, insbesondere wenn b = 0 oder c = 0 ist.

Beispiel 8: Reinquadratische Gleichung 1

$x^2 - 9 = 0$

Anstatt mit der Lösungsformel zu arbeiten ($a = 1$, $b = 0$, $c = -9$) können wir die Lösungen dieser Gleichung viel schneller bestimmen:

$x^2 - 9 = 0 \qquad \mid +9$

$x^2 = 9 \qquad \mid \sqrt{}$

$|x| = 3 \;\Rightarrow\; x_1 = 3\,,\;\; x_2 = -3$

Die Wurzel aus 9 ist definitionsgemäss nur $+3$ (rechte Seite der Gleichung).
x kann jedoch $+3$ oder -3 sein, denn sowohl 3^2 als auch $(-3)^2$ ergeben $+9$.

Beispiel 9: Reinquadratische Gleichung 2

$x^2 + 4 = 0 \qquad \mid -4$

$x^2 = -4 \qquad \mid \sqrt{}$

$|x| = \sqrt{-4} \;\Rightarrow$ keine Lösung

Beispiel 10: Gemischt-quadratische Gleichung

$4x^2 + 5x = 0$

Hier ist $c = 0$. In diesem Fall können Sie immer x ausklammern:

$x(4x + 5) = 0$

Wir haben nun ein Produkt, das $= 0$ ist. Ein Produkt ist $= 0$, wenn einer der Faktoren $= 0$ ist.
Die Gleichung ist also erfüllt, wenn entweder der 1. Faktor (hier: x)
oder der 2. Faktor (hier: $4x + 5$) $= 0$ ist:

1. Fall: $x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

2. Fall: $4x + 5 = 0 \quad \big| -5 \quad \big| :4 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -\frac{5}{4}$

$\Rightarrow \quad L = \left\{ -\frac{5}{4}, 0 \right\}$

Achtung: Auf gar keinen Fall dürfen Sie die Gleichung durch x teilen, weil Sie dann die Lösung $x_1 = 0$ verlieren würden!

Beispiel 11: Bestimmung der Lösungen durch Ausklammern

$x^2 - 8x + 15 = 0$

Auch wenn weder $b = 0$ noch $c = 0$ ist, lassen sich die Lösungen von quadratischen Gleichungen oft schneller durch Ausklammern bestimmen. Hier:

$(x - 3)(x - 5) = 0$

Wie in Beispiel 10 ist die Gleichung erfüllt, wenn einer der Faktoren $= 0$ ist:

1. Fall: $x - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 3$

2. Fall: $x - 5 = 0 \Rightarrow x_2 = 5$

$\Rightarrow \quad L = \{3, 5\}$

Aufgabe 11:
Ordnen Sie die Gleichungen in den Aufgaben 12 bis 18 in
A) Reinquadratische Gleichungen (b = 0)
B) Gemischt-quadratische Gleichungen (c = 0) und
C) Andere Gleichungen.
Bestimmen Sie dann die Lösungen der Gleichungen <u>ohne</u> Lösungsformel (Zuerst A, dann B, dann C).

Aufgabe 12: $2x^2 = 5x$

Aufgabe 13: $9x^2 - 4 = 0$

Aufgabe 14: $x^2 - 4x - 21 = 0$

Aufgabe 15: $x^2 + 1 = 0$

Aufgabe 16: $x^2 - 3x = 40$

Aufgabe 17: $-x^2 + 7x = 0$

Aufgabe 18: $(x - 2)(x - 1) = 2$

Biquadratische Gleichungen

Die Lösungen vieler Gleichungen können nicht ohne weiteres bestimmt werden. Manchmal ist es jedoch möglich, durch eine geeignete *Substitution* die Gleichung in eine quadratische Gleichung zu überführen. Ein wichtiger Gleichungstyp, bei dem dies möglich ist, ist die sogenannte biquadratische Gleichung.

Beispiel 12:

$x^4 - 5x^2 - 36 = 0$ (biquadratisch: quadratisch in x^2)

Das ist eine Gleichung 4. Grades. Wir können aber x^2 durch die Hilfsvariable z substituieren:

$z = x^2 \Rightarrow z^2 - 5z - 36 = 0$

Jetzt haben wir eine quadratische Gleichung, deren Lösungen wir z.B. mit der Lösungsformel berechnen können (oder: Durch Ausklammern, versuchen Sie es!):

$$z_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-36)}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 144}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{169}}{2} = \frac{5 \pm 13}{2}$$

$$z_1 = \frac{5 + 13}{2} = \frac{18}{2} = 9 \quad ; \quad z_2 = \frac{5 - 13}{2} = \frac{-8}{2} = -4$$

z ist aber nur unsere Hilfsvariable. Um x zu berechnen, müssen wir die Lösungen von z in die Substitutionsgleichung $z = x^2$ einsetzen:

1) $9 = x^2 \Rightarrow x_1 = 3 \quad ; \quad x_2 = -3$
2) $-4 = x^2 \Rightarrow$ keine Lösung
$\Rightarrow \quad L = \{-3, 3\}$

Eine biquadratische Gleichung kann bis zu 4 Lösungen haben.

Bestimmen Sie in den Aufgaben 19 und 20 sämtliche Lösungen der biquadratischen Gleichungen.

Aufgabe 19: $2x^4 - x^2 - 28 = 0$

Aufgabe 20: $9x^4 + 4 = 37x^2$

Quadratische Gleichungen mit Parametern

Beispiel 13: Bestimmen Sie den Lösungsterm ohne Diskussion von Sonderfällen (x ist die Lösungsvariable).

$x^2 + 3x = ux + 2u + x \quad \big| -ux - 2u - x$ (Gleichung auf die Grundform bringen)

$x^2 + 2x - ux - 2u = 0$

Wir wollen a, b und c bestimmen und dann die Lösungen mit der Lösungsformel berechnen. Dazu müssen die Summanden, in denen x^2 vorkommt, durch Ausklammern von x^2 zusammen–gefasst werden. Ebenso müssen die Summanden, in denen x vorkommt, durch Ausklammern von x zusammengefasst werden.
Hier: Die beiden Summanden $2x$ und $-ux$ enthalten x und müssen durch ausklammern von x zusammengefasst werden:

$x^2 + (2-u)x - 2u = 0$

$\Rightarrow \quad a = 1,\ b = 2-u,\ c = -2u$

$$\Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-(2-u) \pm \sqrt{(2-u)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2u)}}{2 \cdot 1} = \frac{u - 2 \pm \sqrt{4 - 4u + u^2 + 8u}}{2}$$

Jetzt soll die Diskriminante vereinfacht und falls möglich mit Hilfe der ersten oder zweiten Binomischen Formel faktorisiert werden (damit sich nachher die Wurzel ziehen lässt).

$$x_{1,2} = \frac{u - 2 \pm \sqrt{4 + 4u + u^2}}{2} = \frac{u - 2 \pm \sqrt{(2+u)^2}}{2} = \frac{u - 2 \pm (2+u)}{2}$$

$$x_1 = \frac{u - 2 + 2 + u}{2} = \frac{2u}{2} = u \quad ; \quad x_2 = \frac{u - 2 - (2+u)}{2} = \frac{u - 2 - 2 - u}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

Bestimmen Sie in den Aufgaben 21 und 22 den Lösungsterm ohne Diskussion von Sonderfällen (x ist die Lösungsvariable).

Aufgabe 21: $x^2 - ux + u = x$

Aufgabe 22: $x^2 - ux - u = 1$

Textaufgaben

Beispiel 14: Von zwei Zahlen ist die eine um 50 grösser als die andere und das Produkt um 50 grösser als die Summe. Bestimmen Sie die beiden Zahlen.

Lösung:

1. Schritt : Variable(n) deklarieren

x : Kleinere Zahl $\Rightarrow$ Grössere Zahl : $x + 50$

2. Schritt : Gleichung aufstellen:

Da das Produkt um 50 grösser ist als die Summe, muss zur Summe 50 addiert werden, um auf das gleiche Ergebnis zu kommen:

Produkt = Summe + 50 $\Rightarrow$ $x(x+50) = x + x + 50 + 50$

3. Schritt: Gleichung lösen

$$x^2 + 50x = 2x + 100 \Rightarrow x^2 + 48x - 100 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+50) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 2, \quad x_2 = -50$$

4. Schritt: Antwortsatz

Die beiden Zahlen lauten 2 und 52 oder -50 und 0.

Beispiel 15: Ein Blumenbeet von 3 m Länge und 2 m Breite ist ringsum mit konstanter Breite von Rasen eingefasst, so dass Einfassung und Beet gleichen Flächeninhalt haben. Wie breit ist die Einfassung?

Lösung:

x : Breite der Einfassung

Fläche Beet = Fläche Einfassung $\Rightarrow$ Länge $\cdot$ Breite $= 2 \cdot$ Länge $\cdot x + 2 \cdot$ Breite $\cdot x + 4x^2$

Hinweis : Machen Sie eine Skizze!

$$\Rightarrow 3 \cdot 2 = 2 \cdot 3 \cdot x + 2 \cdot 2 \cdot x + 4x^2 \Rightarrow 6 = 6x + 4x + 4x^2 \Rightarrow 0 = 4x^2 + 10x - 6$$

$$\Rightarrow 0 = 2x^2 + 5x - 3$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{-5 \pm 7}{4}$$

$$x_1 = \frac{-5+7}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad ; \quad x_2 = \frac{-5-7}{4} = \frac{-12}{4} = -3$$

Die Einfassung ist 0.5 m breit.

Beispiel 16: Ein Mensch beginnt ein Geschäft mit Fr. 2000.-. Den Gewinn des ersten Jahres schlägt er voll zum Kapital. Im zweiten Jahr gewinnt er den gleich hohen Prozentsatz, wodurch das Kapital auf Fr. 2645.- anwächst. Wie viele Prozente hat er jedes Jahr gewonnen?

Lösung:

$x:\ \text{Prozentsatz}$

$$\text{Kapital nach dem ersten Jahr}: K_1 = 2000 + 2000 \cdot \frac{x}{100} = 2000 + 20x$$

$$\text{Kapital nach dem zweiten Jahr}: K_2 = K_1 + K_1 \cdot \frac{x}{100} = 2000 + 20x + (2000 + 20x) \cdot \frac{x}{100}$$

$$\Rightarrow \quad 2645 = 2000 + 20x + (2000 + 20x) \cdot \frac{x}{100} \quad \Rightarrow \quad 2645 = 2000 + 20x + 20x + 0.2x^2$$

$$\Rightarrow \quad 0 = 0.2x^2 + 40x - 645 \quad \Rightarrow \quad 0 = x^2 + 200x - 3225$$

$$\Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-200 \pm \sqrt{200^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3225)}}{2 \cdot 1} = \frac{-200 \pm \sqrt{40000 + 12900}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-200 \pm \sqrt{52900}}{2} = \frac{-200 \pm 230}{2}$$

$$x_1 = \frac{-200 + 230}{2} = \frac{30}{2} = 15 \quad ; \quad x_2 = \frac{-200 - 230}{2} = \frac{-430}{2} = -215$$

Er hat jährlich 15 % gewonnen.

Aufgabe 23:
Das um 100 verminderte Quadrat einer gesuchten Zahl übertrifft die Zahl 200 um so viel, wie die gesuchte Zahl unter 300 liegt.

Aufgabe 24:
Die Grundlinie eines Dreiecks von 3.6 m^2 Flächeninhalt ist um 11.4 m länger als die zugehörige Höhe. Berechnen Sie die Grundlinie.

Aufgabe 25:
Eine Baumaschine mit einem Anschaffungswert von Fr. 24000.- wurde zweimal mit dem gleichen Prozentsatz abgeschrieben und hat zur Zeit einen Wert von Fr. 16335.-. Wie viele Prozente beträgt der Abschreibungssatz?

Lösungen

Aufgabe 1

$$2x^2 - x - 6 = 0$$

$$\Rightarrow \quad a = 2,\ b = -1,\ c = -6$$

$$\Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 48}}{4} = \frac{1 \pm 7}{4}$$

$$x_1 = \frac{1+7}{4} = \frac{8}{4} = 2 \quad ; \quad x_2 = \frac{1-7}{4} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$$

Aufgabe 2

$$5x^2 - 4 = -8x \qquad | +8x$$

$$5x^2 + 8x - 4 = 0$$

$$\Rightarrow \quad a = 5,\ b = 8,\ c = -4$$

$$\Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-4)}}{2 \cdot 5} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 80}}{10} = \frac{-8 \pm \sqrt{144}}{10} = \frac{-8 \pm 12}{10}$$

$$x_1 = \frac{-8+12}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \quad ; \quad x_2 = \frac{-8-12}{10} = \frac{-20}{10} = -2$$

Aufgabe 3

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{6} = 0 \qquad | \cdot 6$$

$$3x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad a = 3,\ b = -2,\ c = -1$$

$$\Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)}}{2 \cdot 3} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{6} = \frac{2 \pm 4}{6}$$

$$x_1 = \frac{2+4}{6} = \frac{6}{6} = 1 \quad ; \quad x_2 = \frac{2-4}{6} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$$

Aufgabe 4

$$-9x^2 - 54x - 63 = 0 \quad \Big| : (-9)$$

Empfehlung: Schauen Sie immer zuerst, ob sich die Gleichung vereinfachen lässt.

$$x^2 + 6x + 7 = 0$$

$$\Rightarrow \quad a = 1,\ b = 6,\ c = 7$$

$$\Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7}}{2 \cdot 1} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 28}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{8}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{4 \cdot 2}}{2} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{2}}{2} = \frac{2\left(-3 \pm \sqrt{2}\right)}{2} = -3 \pm \sqrt{2}$$

$$x_1 = -3 + \sqrt{2} \approx -1.586 \quad ; \quad x_2 = -3 - \sqrt{2} \approx -4.141$$

Aufgabe 5

$$9y^2 + 9y + 0.25 = 0$$

$$\Rightarrow \quad a = 9,\ b = 9,\ c = 0.25$$

Natürlich könnten wir die Gleichung auch mit 4 multiplizieren. In der Lösungsformel wird c aber ohnehin mit 4 multipliziert, so dass wir uns die grossen Zahlen sparen können.

$$\Rightarrow \quad y_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot 9 \cdot 0.25}}{2 \cdot 9} = \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 9}}{18} = \frac{-9 \pm \sqrt{72}}{18}$$

$$y_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{36 \cdot 2}}{18} = \frac{-9 \pm 6\sqrt{2}}{18} = \frac{3\left(-3 \pm 2\sqrt{2}\right)}{18} = \frac{-3 \pm 2\sqrt{2}}{6}$$

$$y_1 = \frac{-3 + 2\sqrt{2}}{6} \approx -0.0286 \quad ; \quad y_2 = \frac{-3 - 2\sqrt{2}}{6} \approx -0.9714$$

Aufgabe 6

$a = 4,\ b = 12,\ c = 9$

$D = b^2 - 4ac$

$D = 12^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 144 - 144 = 0 \quad \Rightarrow \quad 1$ Lösung

Aufgabe 7

$a = 6, \; b = -19, \; c = 15$

$D = b^2 - 4ac$

$D = (-19)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 15 = 361 - 360 = 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad 2$ Lösungen

Aufgabe 8

$a = 16, \; b = 25, \; c = 10$

$D = b^2 - 4ac$

$D = 25^2 - 4 \cdot 16 \cdot 10 = 625 - 640 = -15 < 0 \quad \Rightarrow \quad$ keine Lösung

Aufgabe 9

$a = 2, \; b = -3, \; c = u$

$D = 0$

$b^2 - 4ac = 0$

$(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot u = 0 \quad \Big| + 8u \quad \Big| : 8 \quad \Rightarrow \quad u = \frac{9}{8}$

$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-3)}{2 \cdot 2} = \frac{3}{4}$

Aufgabe 10

$a = 1, \; b = 2u, \; c = 4$

$D = 0$

$b^2 - 4ac = 0$

$(2u)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad 4u^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad u^2 = 4 \quad \Big| \sqrt{}$

$|u| = 2$ (vgl. nächster Abschnitt)

$u = \pm 2$

Wenn $u = 2$ ist hat die Gleichung genau eine Lösung,
und wenn $u = -2$ ist hat die Gleichung auch genau eine Lösung:

$u = 2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 4x + 4 = 0 \quad \Rightarrow$ Die einzige Lösung lautet $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2 \cdot 1} = -2$

$u = -2 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 4x + 4 = 0 \quad \Rightarrow$ Die einzige Lösung lautet $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2 \cdot 1} = 2$

Aufgabe 11

A) 13, 15 B) 12, 17, 18 (!) C) 14, 16

Aufgabe 13

$$9x^2 - 4 = 0 \quad \Big|\ +4 \quad \Big|\ :9 \quad \Big|\ \sqrt{\ } \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{2}{3}\ , \quad x_2 = -\frac{2}{3}$$

Aufgabe 15

$$x^2 + 1 = 0 \quad \Big|\ -1 \quad \Big|\ \sqrt{\ } \quad \Rightarrow \quad \text{keine Lösung}$$

Aufgabe 12

$$2x^2 = 5x \quad \Big|\ -5x$$

$$2x^2 - 5x = 0 \quad \Rightarrow \quad x\left(2x - 5\right) = 0$$

1. Fall: $x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0$
2. Fall: $2x - 5 = 0 \quad \Big|\ +5 \quad \Big|\ :2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{5}{2}$

$\Rightarrow \quad L = \left\{0\ ,\ \frac{5}{2}\right\}$

Aufgabe 17

$$-x^2 + 7x = 0 \quad \Rightarrow \quad x\left(7 - x\right) = 0$$

1. Fall: $x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0$
2. Fall: $7 - x = 0 \quad \Big|\ +x \quad \Rightarrow \quad x_2 = 7$

$\Rightarrow \quad L = \left\{0\ ,\ 7\right\}$

Aufgabe 18

$$\left(x - 2\right)\left(x - 1\right) = 2$$

Achtung: Auf der rechten Seite steht nicht 0. Deshalb muss das Produkt ausgerechnet werden.

$x^2 - 3x + 2 = 2 \quad \Big|\ -2 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 3x = 0 \quad \Rightarrow$ Gemischt – quadratische Gleichung

$\Rightarrow \quad x\left(x - 3\right) = 0$

1. Fall: $x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0$
2. Fall: $x - 3 = 0 \quad \Big|\ +3 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 3$

$\Rightarrow \quad L = \left\{0\ ,\ 3\right\}$

Aufgabe 14

$$x^2 - 4x - 21 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x+3)(x-7) = 0$$

1. Fall: $x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -3$
2. Fall: $x - 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 7$

$\Rightarrow \quad L = \{-3, 7\}$

Aufgabe 16

$$x^2 - 3x = 40 \quad \big| -40 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 3x - 40 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x+5)(x-8) = 0$$

1. Fall: $x + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -5$
2. Fall: $x - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 8$

$\Rightarrow \quad L = \{-5, 8\}$

Aufgabe 19

$$2x^4 - x^2 - 28 = 0$$

$$z = x^2 \quad \Rightarrow \quad 2z^2 - z - 28 = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-28)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 224}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{225}}{4} = \frac{1 \pm 15}{4}$$

$$z_1 = \frac{1+15}{4} = \frac{16}{4} = 4 \quad ; \quad z_2 = \frac{1-15}{4} = \frac{-14}{4} = -\frac{7}{2}$$

1) $4 = x^2 \quad \Rightarrow x_1 = 2 \quad ; \quad x_2 = -2$

2) $-\frac{7}{2} = x^2 \quad \Rightarrow$ keine Lösung

$\Rightarrow \quad L = \{-2, 2\}$

Aufgabe 20

$$9\,x^4 + 4 = 37\,x^2 \quad \Rightarrow \quad 9\,x^4 - 37\,x^2 + 4 = 0$$

$$z = x^2 \quad \Rightarrow \quad 9\,z^2 - 37\,z + 4 = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{-(-37) \pm \sqrt{(-37)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4}}{2 \cdot 9} = \frac{37 \pm \sqrt{1369 - 144}}{18} = \frac{37 \pm \sqrt{1225}}{18} = \frac{37 \pm 35}{18}$$

$$z_1 = \frac{37 + 35}{18} = \frac{72}{18} = 4 \quad ; \quad z_2 = \frac{37 - 35}{18} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$$

1) $4 = x^2 \quad \Rightarrow x_1 = 2 \quad ; \quad x_2 = -2$

2) $\frac{1}{9} = x^2 \quad \Rightarrow x_3 = \frac{1}{3} \quad ; \quad x_4 = -\frac{1}{3}$

$\Rightarrow \quad L = \left\{ -2, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 2 \right\}$

Aufgabe 21

$$x^2 - u\,x + u = x \qquad \Big|\; -x$$

$$x^2 - u\,x - x + u = 0$$

$$x^2 - (u + 1)\,x + u = 0$$

$$\Rightarrow \quad a = 1,\; b = -(u + 1) = -u - 1,\; c = u$$

$$\Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-(-u - 1) \pm \sqrt{(-u - 1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot u}}{2 \cdot 1} = \frac{u + 1 \pm \sqrt{u^2 + 2\,u + 1 - 4\,u}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{u + 1 \pm \sqrt{u^2 - 2\,u + 1}}{2} = \frac{u + 1 \pm \sqrt{(u - 1)^2}}{2} = \frac{u + 1 \pm (u - 1)}{2}$$

$$x_1 = \frac{u + 1 + u - 1}{2} = \frac{2\,u}{2} = u \quad ; \quad x_2 = \frac{u + 1 - (u - 1)}{2} = \frac{u + 1 - u + 1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Aufgabe 22

$x^2 - u\,x - u = 1 \qquad \Big|\; -1$

$x^2 - u\,x - u - 1 = 0$

$\Rightarrow \quad a = 1,\; b = -u,\; c = -u - 1$

$$\Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-(-u) \pm \sqrt{(-u)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-u-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{u \pm \sqrt{u^2 + 4u + 4}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{u \pm \sqrt{(u+2)^2}}{2} = \frac{u \pm (u+2)}{2}$$

$$x_1 = \frac{u+u+2}{2} = \frac{2u+2}{2} = \frac{2(u+1)}{2} = u+1 \quad ; \quad x_2 = \frac{u-(u+2)}{2} = \frac{u-u-2}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Aufgabe 23

x : gesuchte Zahl

Das um 100 verminderte Quadrat der gesuchten Zahl: $x^2 - 100$

$\Rightarrow \quad x^2 - 100 - 200 = 300 - x \quad \Rightarrow \quad x^2 + x - 600 = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = (x+25)(x-24)$

$\Rightarrow \quad x_1 = -25 \quad ; \quad x_2 = 24$

Die gesuchte Zahl ist -25 oder 24.

Aufgabe 24

x : Grundlinie $\Rightarrow$ Höhe : $x - 11.4$

$$\text{Flächeninhalt} = \frac{\text{Grundlinie} \cdot \text{Höhe}}{2} \Rightarrow 3.6 = \frac{x\,(x - 11.4)}{2} \Rightarrow 7.2 = x\,(x - 11.4)$$

$$\Rightarrow 7.2 = x^2 - 11.4\,x \Rightarrow 36 = 5\,x^2 - 57\,x \Rightarrow 0 = 5\,x^2 - 57\,x - 36$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-57) \pm \sqrt{(-57)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-36)}}{2 \cdot 5} = \frac{57 \pm \sqrt{3249 + 720}}{10}$$

$$x_{1,2} = \frac{57 \pm \sqrt{3969}}{10} = \frac{57 \pm 63}{10}$$

$$x_1 = \frac{57 + 63}{10} = \frac{120}{10} = 12 \quad ; \quad x_2 = \frac{57 - 63}{10} = \frac{-6}{10} = -0.6$$

Die Grundlinie ist 12 m lang.

Aufgabe 25

x : Abschreibungsatz

Wert nach 1. Abschreibung: $W_1 = 24000 - 24000 \cdot \frac{x}{100} = 24000 - 240\,x$

Wert nach 2. Abschreibung: $W_2 = W_1 - W_1 \cdot \frac{x}{100} = 24000 - 240\,x - (24000 - 240\,x) \cdot \frac{x}{100}$

$$\Rightarrow 16335 = 24000 - 240\,x - (24000 - 240\,x) \cdot \frac{x}{100}$$

$$\Rightarrow 16335 = 24000 - 240\,x - 240\,x + 2.4\,x^2 \Rightarrow 2.4\,x^2 - 480\,x + 7665 = 0$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-480) \pm \sqrt{(-480)^2 - 4 \cdot 2.4 \cdot 7665}}{2 \cdot 2.4} = \frac{480 \pm \sqrt{230400 - 73584}}{4.8}$$

$$x_{1,2} = \frac{480 \pm \sqrt{156816}}{4.8} = \frac{480 \pm 396}{4.8}$$

$$x_1 = \frac{480 + 396}{4.8} = \frac{876}{4.8} = 182.5 \quad ; \quad x_2 = \frac{480 - 396}{4.8} = \frac{84}{4.8} = 17.5$$

Der Abschreibungssatz beträgt 17.5 %.