KANTON
LUZERN
Bildungs- und Kulturdepartement

Kantonale Fachschaft Mathematik

Repetitionsaufgaben
Negative Zahlen/Brüche/Prozentrechnen

Zusammengestellt von der Fachschaft Mathematik der Kantonsschule Willisau

Inhaltsverzeichnis

A) Lernziele

- Mit negativen Zahlen rechnen können
- Brüche erweitern und kürzen können
- Mit Brüchen rechnen können
- Prozentformel kennen und anwenden können
- Prozentuale Zu- und Abnahmen korrekt vornehmen

B) Theorie „Negative Zahlen“

- Die **Menge der ganzen Zahlen** wird mit $\mathbb{Z}$ bezeichnet und besteht aus den folgenden Zahlen: $\mathbb{Z} = \{\dots, \mathbf{-3}, \mathbf{-2}, \mathbf{-1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \dots\}$.

  Im Gegensatz zu den natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ und zur Menge $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ gehören **zu** $\mathbb{Z}$ auch die **negativen Zahlen**. Damit gilt die Teilmengenbeziehung $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z}$.

- Wird eine Zahl auf der Zahlengeraden **am Nullpunkt gespiegelt,** so entsteht die zugehörige **Gegenzahl**. Rechnerisch kann einfach ein **Minuszeichen** (negatives Vorzeichen) **hinzugefügt** werden. Zwei negative Vorzeichen **heben sich gegenseitig auf.**

  Zum Beispiel ist -3 die Gegenzahl zu 3. Zudem ist $-(-5) = 5$ die Gegenzahl zu -5.

- Der **(Absolut-)Betrag** $|\boldsymbol{a}|$ einer Zahl a misst ihren **Abstand vom Nullpunkt** und ist demnach **immer grösser oder gleich 0.**

  Für **positive Zahlen** oder die Zahl 0 ist der Betrag also **gleich der Zahl selbst:** $|a| = a$ für $a \geq 0$

  Für **negative Zahlen** ist der Betrag die **Gegenzahl**: $|a| = -a$ für $a < 0$
  Damit ist zum Beispiel der Betrag von -4 gegeben durch $|-4| = -(-4) = 4$

- Addition: Eine **negative Zahl** zu **addieren** ist das Gleiche wie die **Subtraktion ihrer Gegenzahl**: $a + (-b) = a - b$

  Beispiele: $5 + (-3) = 5 - 3 = 2$ $\qquad$ $-7 + (-2) = -7 - 2 = -9$

- Subtraktion: Eine **negative Zahl** zu **subtrahieren** ist das Gleiche wie die **Addition ihrer Gegenzahl**: $a - (-b) = a + b$

  Beispiele: $5 - (-3) = 5 + 3 = 8$ $\qquad$ $-7 - (-2) = -7 + 2 = -5$

- Multiplikation:

$$(+a) \cdot (+b) = +(ab)$$
$$(+a) \cdot (-b) = -(ab)$$
$$(-a) \cdot (+b) = -(ab)$$
$$(-a) \cdot (-b) = +(ab)$$

  Bei zwei Zahlen mit **gleichen Vorzeichen** ist das Resultat **positiv**, bei zwei Zahlen mit **verschiedenen Vorzeichen** ist das Resultat **negativ**.

- Division:

$$\frac{+a}{+b} = +\frac{a}{b}$$
$$\frac{+a}{-b} = -\frac{a}{b}$$
$$\frac{-a}{+b} = -\frac{a}{b}$$
$$\frac{-a}{-b} = +\frac{a}{b}$$

  Bei zwei Zahlen mit **gleichen Vorzeichen** ist das Resultat **positiv**, bei zwei Zahlen mit **verschiedenen Vorzeichen** ist das Resultat **negativ**.

C) Aufgaben „Negative Zahlen“

1. Zu welchen der Zahlmengen $\mathbb{N}, \mathbb{N}_0$ und $\mathbb{Z}$ gehört die Zahl?

   a) 3 b) 0 c) -5 d) 3.5

2. Berechnen Sie zu allen Zahlen jeweils ihre Gegenzahl und ihren Betrag.

   a) 4 b) 0 c) -2

3. Berechnen Sie:

   a) $3 + (-4)$ b) $4 - (-3)$ c) $-3 - (-4)$ d) $|3| + |-4|$
   e) $|3 + (-4)|$ f) $-23 - (-5)$ g) $4 - \big(-(-5)\big)$ h) $4 - (-5 - 3)$
   i) $(-31) + (+48) + (-29) + (+43) + (-17)$ j) $27 + [(+6) - (-3) - (-8)]$

4. Berechnen Sie:

   a) $3 \cdot (-4)$ b) $4 \cdot (-3)$ c) $-3 \cdot (-4)$ d) $|3| \cdot |-4|$
   e) $|3 \cdot (-4)|$ f) $-23 \cdot (-5)$ g) $4 \cdot \big(-1 \cdot (-5)\big)$ h) $4 \cdot (-5 \cdot 3)$
   i) $(-5)(-9) + 2(-4) - (-5)(-3)$ j) $(-2)^3 - 2(-3)^2 + 2(-3)^3$

5. Berechnen Sie:

   a) $\frac{15}{-3}$ b) $\frac{-15}{-5}$ c) $-\frac{-15}{5}$ d) $-\frac{|-15|}{5}$
   e) $-\left|\frac{-15}{5}\right|$ f) $-\frac{28}{-4}$ g) $\frac{-32}{-4\cdot(-2)}$ h) $-\frac{-32}{2\cdot(-2)}$
   i) $(-36) : (-4) + 5(-2) + (-6) : (-3)$ j) $(-2)^5 + (-15) : (-3) - 8 : 4$

D) Musterlösungen „Negative Zahlen“

1. a) $3 \in \mathbb{N}, 3 \in \mathbb{N}_0, 3 \in \mathbb{Z}$
   (was in $\mathbb{N}$ liegt, liegt automatisch auch in den grösseren Mengen $\mathbb{N}_0$ und $\mathbb{Z}$)
   b) $0 \notin \mathbb{N}, 0 \in \mathbb{N}_0, 0 \in \mathbb{Z}$
   c) $-5 \notin \mathbb{N}, -5 \notin \mathbb{N}_0, -5 \in \mathbb{Z}$
   d) $3.5 \notin \mathbb{N}, 3.5 \notin \mathbb{N}_0, 3.5 \notin \mathbb{Z}$ ($3.5 = \frac{7}{2} \in \mathbb{Q}$ (rationale Zahlen), vgl. Abschnitt „Brüche“)

2. a) Gegenzahl -4, Betrag 4
   b) Gegenzahl 0 (man schreibt nie -0), Betrag 0
   c) Gegenzahl $-(-2) = 2$, Betrag 2

3. a) $3 + (-4) = 3 - 4 = -1$
   b) $4 - (-3) = 4 + 3 = 7$
   c) $-3 - (-4) = -3 + 4 = 1$
   d) $|3| + |-4| = 3 + 4 = 7$
   (zuerst Beträge, dann Addition)
   e) $|3 + (-4)| = |3 - 4| = |-1| = 1$
   (zuerst Addition, am Schluss Betrag)
   f) $-23 - (-5) = -23 + 5 = -18$
   g) $4 - \big(-(-5)\big) = 4 - (+5) = 4 - 5 = -1$
   (Zwei negative Vorzeichen heben sich auf.)
   h) $4 - (-5 - 3) = 4 - (-8) = 4 + 8 = 12$
   (Klammer zuerst)
   i) $(-31) + (+48) + (-29) + (+43) + (-17) = -31 + 48 - 29 + 43 - 17$
   $= 17 - 29 + 43 - 17 = -12 + 43 - 17 = 31 - 17 = 14$
   j) $27 + [(+6) - (-3) - (-8)] = 27 + [6 + 3 + 8] = 27 + 17 = 44$
   (Eckige Klammern haben keine andere Bedeutung als runde, sondern dienen der Übersichtlichkeit.)

4. a) $3 \cdot (-4) = -12$
   b) $4 \cdot (-3) = -12$
   c) $-3 \cdot (-4) = +12 = 12$
   d) $|3| \cdot |-4| = 3 \cdot 4 = 12$
   (zuerst Beträge, dann Multiplikation)
   e) $|3 \cdot (-4)| = |-12| = 12$
   (zuerst Multiplikation, dann Betrag)
   f) $-23 \cdot (-5) = 115$
   g) $4 \cdot \big(-1 \cdot (-5)\big) = 4 \cdot (5) = 20$
   h) $4 \cdot (-5 \cdot 3) = 4 \cdot (-15) = -60$
   i) $(-5)(-9) + 2(-4) - (-5)(-3) = 45 + (-8) - 15 = 45 - 8 - 15 = 22$ (Punkt vor Strich)
   j) $(-2)^3 - 2(-3)^2 + 2(-3)^3 = (-2)(-2)(-2) - 2(-3)(-3) + 2(-3)(-3)(-3)$
   $= -8 - 2 \cdot 9 + 2 \cdot (-27) = -8 - 18 + (-54) = -8 - 18 - 54 = -26 - 54 = -80$
   (Potenz gilt für alles, was direkt darunter steht, also hier für (-2) bzw. (-3) bzw. (-3). Bei drei negativen Vorzeichen bleibt das Produkt negativ. Es gilt Potenz vor Punkt vor Strich.)

5. a) $\frac{15}{-3} = -5$
   b) $\frac{-15}{-5} = 3$
   c) $-\frac{-15}{5} = -(-3) = 3$
   d) $-\frac{|-15|}{5} = -\frac{15}{5} = -3$
   (zuerst Betrag, dann Division, dann negatives Vorzeichen)
   e) $-\left|\frac{-15}{5}\right| = -|-3| = -(+3) = -3$
   (zuerst Division, dann Betrag, dann negatives Vorzeichen)
   f) $-\frac{28}{-4} = -(-7) = 7$
   g) $\frac{-32}{-4\cdot(-2)} = \frac{-32}{8} = -4$
   (zuerst Nenner ausrechnen, dann dividieren)
   h) $-\frac{-32}{2\cdot(-2)} = -\frac{-32}{-4} = -(+8) = -8$
   (zuerst Nenner ausrechnen, dann Division, dann negatives Vorzeichen)
   i) $(-36) : (-4) + 5(-2) + (-6) : (-3) = 9 + (-10) + 2 = 9 - 10 + 2 = -1 + 2 = 1$
   j) $(-2)^5 + (-15) : (-3) - 8 : 4 = (-2)(-2)(-2)(-2)(-2) + 5 - 2 = -32 + 5 - 2$
   $= -27 - 2 = -29$
   (Bei fünf negativen Vorzeichen bleibt das Produkt negativ. Es gilt Potenz vor Punkt vor Strich.)

E) Theorie „Brüche“

- Die **Menge der rationalen Zahlen** wird mit $\mathbb{Q}$ bezeichnet und besteht aus **allen Bruchzahlen**.

  Alle **ganzen Zahlen** aus $\mathbb{Z}$ können auch **als Brüche aufgefasst** werden, indem sie als Eintel geschrieben werden, z.B. $3 = \frac{3}{1}$. Damit gilt die Teilmengenbeziehung $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

- Die Zahl **oberhalb** des Bruchstrichs heisst **Zähler**, diejenige **unterhalb** des Bruchstrichs heisst **Nenner**, also $\frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}}$.

- Zu einem Bruch $\frac{a}{b}$ heisst der Bruch $\frac{b}{a}$ mit **vertauschtem Zähler und Nenner** der **Kehrbruch** bzw. **Kehrwert**.

- Zwei Brüche heissen **gleichnennrig** bzw. **gleichnamig**, wenn sie **gleiche Nenner** haben. Zum Beispiel sind $\frac{3}{5}$ und $\frac{12}{5}$ gleichnennrig.

- **Erweitern:** Ein Bruch kann **erweitert** werden, indem **Zähler und Nenner mit derselben Zahl ≠ 0 multipliziert** werden. Dabei ändert sich der Wert des Bruches nicht, die Brüche sind **äquivalent** bzw. **gleichwertig**.

  Beispiel: $\frac{1}{3} = \frac{5}{15}$, da der Bruch mit 5 erweitert wurde. Es hätte auch mit jeder anderen Zahl erweitert werden können.

- **Kürzen:** Ein Bruch kann **gekürzt** werden, indem **Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl ≠ 0 dividiert** werden. Dabei ändert sich der Wert des Bruches nicht, die Brüche sind **äquivalent** bzw. **gleichwertig**. Kürzen ist also die **Umkehroperation** zum Erweitern.

  Es wird in der Regel **immer verlangt,** dass Resultate mit einem komplett **gekürzten Bruch** angegeben werden.

  Beispiel: $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$, da der Bruch mit 5 gekürzt werden konnte.

- **„Aus Differenzen und Summen kürzen nur die Dummen.“** lautet die **Merkregel.**
  Es dürfen ausschliesslich **Faktoren gekürzt** werden.

  Beispiele: $\frac{3\cdot 4}{14} = \frac{3\cdot 2}{7} = \frac{6}{7}$ (Kürzen erlaubt, da Faktor 2 gekürzt wurde.)
  $\frac{a+b}{bc} \neq \frac{a}{c}$ (b kann nicht gekürzt werden, weil b im Zähler kein Faktor ist, sondern ein Summand; denn z.B. für $a = 2, b = -3$ und $c = 8$ ergibt sich: $\frac{a+b}{bc} = \frac{2+(-3)}{-3\cdot 8} = \frac{-1}{-24} = \frac{1}{24}$, aber $\frac{a}{c} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$)

- **Addition/Subtraktion:** Zwei Brüche werden folgendermassen addiert bzw. subtrahiert:
  1. Die Brüche werden **gleichnennrig** gemacht, indem geeignet erweitert wird (kgV der Nenner).
  2. Die **Zähler** werden **addiert bzw. subtrahiert**, der **Nenner** wird **beibehalten**.
  3. Der Bruch wird wenn möglich **gekürzt**.

  Beispiel: $\frac{5}{12} + \frac{2}{15} \overset{\text{erweitern}}{=} \frac{25}{60} + \frac{8}{60} = \frac{33}{60} \overset{\text{kürzen mit 3}}{=} \frac{11}{20}$

- **Multiplikation:** Zwei Brüche werden folgendermassen multipliziert:
  1. Der neue Zähler wird durch **Zähler mal Zähler** berechnet.
  2. Der neue Nenner wird durch **Nenner mal Nenner** berechnet.
  3. Der Bruch wird wenn möglich **gekürzt**. Das Kürzen kann bereits **vor der Multiplikation** vorgenommen werden, indem Zahlen aus einem Zähler mit Zahlen aus einem Nenner gekürzt werden.
  Merke: Die Brüche müssen **nicht gleichnennrig** gemacht werden.

  Beispiel: $\frac{5}{12} \cdot \frac{2}{15} \overset{\text{kürzen}}{=} \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{18}$

- **Spezialfall: Multiplikation mit einer Zahl**
  Wenn ein Bruch **mit einer Zahl multipliziert** werden muss, kann die obige Regel angewendet werden, nachdem die **Zahl als Eintel geschrieben** wird.
  Es gilt die Regel: $a \cdot \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}$

  Beispiel: $3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{1} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 5} = \frac{6}{5}$
  oder direkt mit der obigen Regel: $3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 2}{5} = \frac{6}{5}$

- **Division:** Zwei Brüche werden folgendermassen dividiert:
  1. Aus der Division wird eine **Multiplikation mit dem Kehrwert des zweiten Bruchs** (Divisor) geschrieben.
  2. Die Multiplikation (vgl. oben) wird durchgeführt.

  Beispiel: $\frac{5}{12} : \frac{2}{15} = \frac{5}{12} \cdot \frac{15}{2}$
  Ab jetzt handelt es sich um eine Multiplikation, bitte selbst nachrechnen. Lösung: $\frac{25}{8}$

- **Doppelbrüche** sind nichts anderes als die **Division zweier Brüche**. Der **grösste Bruchstrich** wird **als Division umgeschrieben** und dann kommt die Division (vgl. oben) zur Anwendung.

  Beispiel: $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{6}} = \frac{3}{4} : \frac{5}{6} = \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{5} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{10}$

  Merkregel: Es kann $\frac{\textbf{äussere}}{\textbf{innere}}$ gerechnet werden. Denn 3 und 6 sind die „äusseren", 4 und 5 sind die „inneren" Zahlen des Bruchs, also $\frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 5}$.

F) Aufgaben „Brüche“

6. Wir betrachten den Bruch $\frac{-6}{2}$.

   a) Zu welchen der Zahlmengen $\mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ gehört die Zahl?
   b) Geben Sie den Kehrwert an und kürzen Sie so weit wie möglich.
   c) Erweitern Sie den ursprünglichen Bruch auf Nenner 8.
   d) Erweitern Sie den ursprünglichen Bruch mit Faktor 8.

7. Kürzen Sie die folgenden Brüche so weit wie möglich:

   a) $\frac{3}{12}$ b) $\frac{24}{56}$ c) $\frac{100}{36}$ d) $\frac{21}{48}$
   e) $\frac{3+18}{14}$ f) $\frac{25\cdot 4}{2\cdot 5}$ g) $\frac{2xy}{6xy^2}$ h) $\frac{55r^6s}{33rst}$

8. Berechnen Sie:

   a) $\frac{1}{12}+\frac{3}{12}$ b) $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$ c) $\frac{3}{4}-\frac{1}{6}$ d) $\frac{2}{8}-\frac{2}{5}$
   e) $\frac{1}{8}+\frac{1}{3}-\frac{1}{12}$ f) $\frac{11}{12}-\frac{3}{6}+\frac{1}{8}$ g) $\frac{3}{14}+2$ h) $\frac{6}{7}-\frac{1}{3}$

9. Berechnen Sie:

   a) $\frac{1}{12}\cdot\frac{3}{12}$ b) $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}$ c) $\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{6}$ d) $\frac{2}{8}\cdot\frac{2}{5}$
   e) $\frac{1}{8}\cdot\frac{16}{3}\cdot\frac{1}{12}$ f) $5\cdot\frac{3}{8}$ g) $\frac{3}{14}\cdot 2$ h) $\frac{6}{7}\cdot\frac{1}{3}\cdot 7$

10. Berechnen Sie:

    a) $\frac{1}{12}:\frac{3}{12}$ b) $\frac{1}{2}:\frac{1}{8}$ c) $\frac{3}{4}:\frac{1}{6}$ d) $\frac{2}{8}:\frac{2}{5}$
    e) $\frac{1}{8}:\frac{16}{3}:\frac{1}{12}$ f) $5:\frac{3}{8}$ g) $\frac{3}{14}:2$ h) $\frac{6}{7}:\frac{1}{3}\cdot 7$

11. Berechnen Sie:

    a) $\frac{\frac{8}{7}}{\frac{3}{4}}$ b) $\frac{\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{6}}{\frac{7}{8}}$ c) $\frac{\frac{2}{4}}{3}$ d) $\frac{2}{\frac{4}{3}}$
    e) $\frac{8+\frac{1}{3}}{3-\frac{1}{4}}$

G) Musterlösungen „Brüche“

6. a) $\frac{-6}{2} = -3 \notin \mathbb{N}$, $-3 \notin \mathbb{N}_0$, $-3 \in \mathbb{Z}$, $-3 \in \mathbb{Q}$
   (was in $\mathbb{Z}$ liegt, liegt automatisch auch in der grösseren Menge $\mathbb{Q}$, da -3 auch mit $-\frac{3}{1}$ oder eben $\frac{-6}{2}$ als Bruch geschrieben werden kann)
   b) Kehrwert $\frac{2}{-6}$, gekürzt: $\frac{1}{-3} = -\frac{1}{3} = \frac{-1}{3}$
   (Diese drei Schreibweisen sind alle gleichbedeutend.)
   c) $\frac{-6}{2}$ muss im Nenner mit 4 multipliziert werden, um Nenner 8 zu erhalten. Also muss auch der Zähler mit 4 multipliziert werden: $\frac{-6\cdot 4}{2\cdot 4} = \frac{-24}{8}\left(= -\frac{24}{8}\right)$
   d) $\frac{-6\cdot 8}{2\cdot 8} = \frac{-48}{16}\left(= -\frac{48}{16}\right)$

7. a) $\frac{3}{12} \overset{\text{kürzen mit } 3}{=} \frac{1}{4}$
   b) $\frac{24}{56} \overset{\text{kürzen mit } 8}{=} \frac{3}{7}$
   c) $\frac{100}{36} \overset{\text{kürzen mit } 4}{=} \frac{25}{9}$
   d) $\frac{21}{48} \overset{\text{kürzen mit } 3}{=} \frac{7}{16}$
   e) $\frac{3+18}{14} = \frac{21}{14} = \frac{3}{2}$
   (zuerst Addition ausführen, nicht aus Summe kürzen, anschliessend kürzen mit 7)
   f) $\frac{25\cdot 4}{2\cdot 5} = \frac{5\cdot 2}{1\cdot 1} = \frac{10}{1} = 10$
   (aus Faktoren darf gekürzt werden, einmal mit 5, einmal mit 2; Eintel werden nie stehen gelassen, sondern Zahl wird als ganze Zahl (ohne Bruchstrich) notiert)
   g) $\frac{2xy}{6xy^2} = \frac{1}{3y}$
   (kürzen mit $2xy$; xy^2 bedeutet $x \cdot y^2 = x \cdot y \cdot y$; wird alles gekürzt, bleibt 1 übrig)
   h) $\frac{55r^6s}{33rst} = \frac{5r^5}{3t}$
   (kürzen mit $11rs$; weitere solche Aufgaben mit Variablen finden sich bei den Repetitionsaufgaben zu Bruchtermen)

8. a) $\frac{1}{12} + \frac{3}{12} = \frac{1+3}{12} = \frac{4}{12} \overset{\text{kürzen mit } 4}{=} \frac{1}{3}$
   b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4+1}{8} = \frac{5}{8}$
   (auf 8 = kgV der Nenner erweitert)
   c) $\frac{3}{4} - \frac{1}{6} = \frac{9}{12} - \frac{2}{12} = \frac{9-2}{12} = \frac{7}{12}$
   (auf 12 = kgV der Nenner erweitert)
   d) $\frac{2}{8} - \frac{2}{5} = \frac{10}{40} - \frac{16}{40} = \frac{10-16}{40} = \frac{-6}{40} = -\frac{3}{20}$
   (auf 40 = kgV der Nenner erweitert, am Schluss kürzen mit 2, auch $\frac{-3}{20}$ wäre korrektes Resultat)
   e) $\frac{1}{8} + \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{3}{24} + \frac{8}{24} - \frac{2}{24} = \frac{3+8-2}{24} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$
   (auf 24 = kgV der Nenner erweitert, am Schluss kürzen mit 3)

f) $\frac{11}{12} - \frac{3}{6} + \frac{1}{8} = \frac{22}{24} - \frac{12}{24} + \frac{3}{24} = \frac{22-12+3}{24} = \frac{13}{24}$
(auf 24 = kgV der Nenner erweitert)

g) $\frac{3}{14} + 2 = \frac{3}{14} + \frac{2}{1} = \frac{3}{14} + \frac{28}{14} = \frac{3+28}{14} = \frac{31}{14}$
(ganze Zahlen als Eintel schreiben, auf 14 = kgV der Nenner erweitert)

h) $\frac{6}{7} - \frac{1}{3} = \frac{18}{21} - \frac{7}{21} = \frac{18-7}{21} = \frac{11}{21}$
(auf 21 = kgV der Nenner erweitert)

9. a) $\frac{1}{12} \cdot \frac{3}{12} = \frac{1 \cdot 3}{12 \cdot 12} \overset{\text{kürzen mit } 4}{=} \frac{1 \cdot 1}{4 \cdot 12} = \frac{1}{48}$

b) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 8} = \frac{1}{16}$

c) $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 6} \overset{\text{kürzen mit } 3}{=} \frac{1 \cdot 1}{4 \cdot 2} = \frac{1}{8}$

d) $\frac{2}{8} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 2}{8 \cdot 5} \overset{\text{kürzen mit } 2 \text{ und nochmals mit } 2}{=} \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 5} = \frac{1}{10}$

e) $\frac{1}{8} \cdot \frac{16}{3} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1 \cdot 16 \cdot 1}{8 \cdot 3 \cdot 12} \overset{\text{kürzen mit } 8 \text{ und mit } 2}{=} \frac{1 \cdot 1 \cdot 1}{1 \cdot 3 \cdot 6} = \frac{1}{18}$

f) $5 \cdot \frac{3}{8} = \frac{5}{1} \cdot \frac{3}{8} = \frac{5 \cdot 3}{1 \cdot 8} = \frac{15}{8}$
(ganze Zahlen als Eintel schreiben)

g) $\frac{3}{14} \cdot 2 = \frac{3}{14} \cdot \frac{2}{1} = \frac{3 \cdot 2}{14 \cdot 1} = \frac{3 \cdot 1}{7 \cdot 1} = \frac{3}{7}$
(ganze Zahlen als Eintel schreiben; vor der Multiplikation kürzen mit 2)

h) $\frac{6}{7} \cdot \frac{1}{3} \cdot 7 = \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{1} = \frac{6 \cdot 1 \cdot 7}{7 \cdot 3 \cdot 1} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 1}{1 \cdot 1 \cdot 1} = \frac{2}{1} = 2$
(ganze Zahlen als Eintel schreiben; vor der Multiplikation kürzen mit 3 und mit 7;
Eintel als ganze Zahl (ohne Bruchstrich) notieren)

10. a) $\frac{1}{12} : \frac{3}{12} = \frac{1}{12} \cdot \frac{12}{3} = \frac{1 \cdot 12}{12 \cdot 3} \overset{\text{kürzen mit } 12}{=} \frac{1 \cdot 1}{1 \cdot 3} = \frac{1}{3}$

b) $\frac{1}{2} : \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{1} = \frac{1 \cdot 8}{2 \cdot 1} \overset{\text{kürzen mit } 2}{=} \frac{1 \cdot 4}{1 \cdot 1} = \frac{4}{1} = 4$
(Eintel als ganze Zahl (ohne Bruchstrich) notieren)

c) $\frac{3}{4} : \frac{1}{6} = \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{1} = \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 1} \overset{\text{kürzen mit } 2}{=} \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 1} = \frac{9}{2}$

d) $\frac{2}{8} : \frac{2}{5} = \frac{2}{8} \cdot \frac{5}{2} = \frac{2 \cdot 5}{8 \cdot 2} \overset{\text{kürzen mit } 2}{=} \frac{5}{8}$

e) $\frac{1}{8} : \frac{16}{3} : \frac{1}{12} = \left(\frac{1}{8} \cdot \frac{3}{16}\right) : \frac{1}{12} = \frac{1 \cdot 3}{8 \cdot 16} : \frac{1}{12} = \frac{1 \cdot 3}{8 \cdot 16} \cdot \frac{12}{1} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 12}{8 \cdot 16 \cdot 1} \overset{\text{kürzen mit } 4}{=} \frac{1 \cdot 3 \cdot 3}{2 \cdot 16 \cdot 1} = \frac{9}{32}$

f) $5 : \frac{3}{8} = \frac{5}{1} : \frac{3}{8} = \frac{5}{1} \cdot \frac{8}{3} = \frac{5 \cdot 8}{1 \cdot 3} = \frac{40}{3}$
(ganze Zahlen als Eintel schreiben)

g) $\frac{3}{14} : 2 = \frac{3}{14} : \frac{2}{1} = \frac{3}{14} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3 \cdot 1}{14 \cdot 2} = \frac{3}{28}$
(ganze Zahlen als Eintel schreiben)

h) $\frac{6}{7} : \frac{1}{3} \cdot 7 = \frac{6}{7} \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{7}{1} = \frac{6 \cdot 3 \cdot 7}{7 \cdot 1 \cdot 1} \overset{\text{kürzen mit } 7}{=} \frac{6 \cdot 3 \cdot 1}{1 \cdot 1 \cdot 1} = \frac{18}{1} = 18$
(ganze Zahlen als Eintel schreiben; Eintel als ganze Zahl (ohne Bruchstrich) notieren)

11. a) $\frac{\frac{8}{7}}{\frac{3}{4}} = \frac{8}{7} : \frac{3}{4} = \frac{8}{7} \cdot \frac{4}{3} = \frac{8 \cdot 4}{7 \cdot 3} = \frac{32}{21}$

b) $\frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6}}{\frac{7}{8}} = \frac{\frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 6}}{\frac{7}{8}} \overset{\text{im Zähler kürzen mit } 2}{=} \frac{\frac{1 \cdot 1}{4 \cdot 2}}{\frac{7}{8}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{7}{8}} = \frac{1}{8} : \frac{7}{8} = \frac{1}{8} \cdot \frac{8}{7} = \frac{1 \cdot 8}{8 \cdot 7} \overset{\text{kürzen mit } 8}{=} \frac{1 \cdot 1}{1 \cdot 7} = \frac{1}{7}$

c) $\frac{\frac{2}{4}}{3} = \frac{2}{4} : 3 = \frac{2}{4} : \frac{3}{1} = \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2 \cdot 1}{4 \cdot 3} \overset{\text{kürzen mit 2}}{=} \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6}$

(ganze Zahlen als Eintel schreiben)

d) $\frac{2}{\frac{4}{3}} = 2 : \frac{4}{3} = \frac{2}{1} : \frac{4}{3} = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 4} \overset{\text{kürzen mit 2}}{=} \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2} = \frac{3}{2}$

(ganze Zahlen als Eintel schreiben; Ein Vergleich mit c) zeigt, dass es darauf ankommt, den grössten Bruchstrich als Division umzuschreiben.)

e) $\frac{8+\frac{1}{3}}{3-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{8}{1}+\frac{1}{3}}{\frac{3}{1}-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{24}{3}+\frac{1}{3}}{\frac{12}{4}-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{24+1}{3}}{\frac{12-1}{4}} = \frac{\frac{25}{3}}{\frac{11}{4}} = \frac{25}{3} : \frac{11}{4} = \frac{25}{3} \cdot \frac{4}{11} = \frac{25 \cdot 4}{3 \cdot 11} = \frac{100}{33}$

(Bruchstrich wirkt wie eine Klammer, weshalb zuerst Zähler und Nenner ausgerechnet werden müssen (Addition/Subtraktion). Erst dann kann der Doppelbruch aufgelöst werden.)

H) Theorie „Prozentrechnen“

- Ein **Prozent** steht für einen **Hundertstel**, also $\boldsymbol{p}$ % $= \frac{\boldsymbol{p}}{\mathbf{100}}$.

- Wird von einem **Grundwert** $\boldsymbol{G}$ (immer 100 %) ein gewisser **Prozentsatz** $\boldsymbol{p}$ bestimmt, so erhält man den **Prozentwert** $\boldsymbol{W}$. Es gilt die **Prozentformel** $\boxed{\boldsymbol{W} = \frac{\boldsymbol{G \cdot p}}{\mathbf{100}}}$.
  Durch **Umstellen** erhält man auch die Formeln $G = \frac{W \cdot 100}{p}$ und $p = \frac{W \cdot 100}{G}$.

  Beispiele:
  a) Wie viel sind 23 % von $10\,000$? $G = 10\,000$, $p = 23$ % und $W = \frac{G \cdot p}{100} = \frac{10\,000 \cdot 23}{100} = 2\,300$

  b) Von einem Betrag müssen nur noch 80 % bezahlt werden und die neue Rechnung beläuft sich auf Fr. 54.–. Wie hoch war der ursprüngliche Rechnungsbetrag?
  $p = 80$ %, $W = 54 \Longrightarrow G = \frac{W \cdot 100}{p} = \frac{54 \cdot 100}{80} = 67.5$. Der Rechnungsbetrag war ursprünglich Fr. 67.50.

  c) Wie viele Prozent sind 44 von 200?
  $G = 200$ (da „von“ klarmacht, dass das der Grundwert ist), $W = 44 \Longrightarrow p = \frac{W \cdot 100}{G} = 22$ %

- **Zunahme um $\boldsymbol{p}$ %:** Wenn ein Betrag **um $\boldsymbol{p}$ % zunimmt,** so sind nach der Zunahme beim so genannten Endwert total $(100 + p)$ % des Grundwerts vorhanden. Da Prozente Hundertstel sind, ist $1 + \frac{p}{100}$ gleichwertig.
  Es gilt daher direkt: **Endwert** $= \boldsymbol{G} \cdot \left(\mathbf{1} + \frac{\boldsymbol{p}}{\mathbf{100}}\right)$

  Beispiel: Ein Preis von bisher Fr. 350.– nimmt um 8 % zu.
  Also haben wir neu 108 % $= (100 + 8)$ % $= 1 + \frac{8}{100} = 1.08$ vom Grundwert. Der Endwert beträgt also $350 \cdot 1.08 = 378$ Franken.

- **Abnahme um $\boldsymbol{p}$ %:** Wenn ein Betrag **um $\boldsymbol{p}$ % abnimmt,** so sind nach der Abnahme beim so genannten Endwert total $(100 - p)$ % des Grundwerts vorhanden. Da Prozente Hundertstel sind, ist $1 - \frac{p}{100}$ gleichwertig.
  Es gilt daher direkt: **Endwert** $= \boldsymbol{G} \cdot \left(\mathbf{1} - \frac{\boldsymbol{p}}{\mathbf{100}}\right)$

  Beispiel: Ein Preis von bisher Fr. 378.– nimmt um 8 % ab.
  Also haben wir neu 92 % $= (100 - 8)$ % $= 1 - \frac{8}{100} = 0.92$ vom Grundwert. Der Endwert beträgt also $378 \cdot 0.92 = 347.76$ Franken.

- Aufmerksames Studieren der beiden vorangegangenen Beispiele zeigt: Eine **Zunahme um 8** % kann **nicht** mit einer **Abnahme um 8** % **rückgängig** gemacht werden. Dies ist auch allgemein für p % so.

  Merke: Eine **Zunahme um $\boldsymbol{p}$** % $\Big($Multiplikation mit $\left(1 + \frac{p}{100}\right)\Big)$ kann durch eine **Division mit** $\left(\mathbf{1} + \frac{\boldsymbol{p}}{\mathbf{100}}\right)$ **rückgängig** gemacht werden.

  Beispiel: Es gilt tatsächlich: $378 : 1.08 = 350$.

I) Aufgaben „Prozentrechnen"

12. Berechnen Sie jeweils die fehlende Grösse G, p oder W.

    a) $G = 30$, $p = 6\ \%$
    b) $G = 68$, $W = 72$
    c) $p = 12\ \%$, $W = 144$
    d) $G = 45$, $p = 120\ \%$

13. a) Wie viele Prozent sind 30 von 66?
    b) Wie viele Prozent sind 66 von 30?

14. Berechnen Sie den Endwert.

    a) $G = 3\,000$, $10\ \%$ Zunahme
    b) $G = 4\,500$, $10\ \%$ Abnahme
    c) $G = 400$, $45\ \%$ Zunahme
    d) $G = 38$, $120\ \%$ Zunahme
    e) $G = 40$, $80\ \%$ Abnahme

15. Ein Buch hat bisher Fr. 50.– gekostet. Jetzt wird es für Fr. 48.– angeboten. Wie viel Prozent Rabatt erhält man also?

16. Ein Wert konnte von $1\,340$ auf $1\,876$ gesteigert werden. Wie viel Prozent beträgt die Zunahme?

17. Ein Preis wird zuerst um $60\ \%$ erhöht und anschliessend um $60\ \%$ gesenkt. Wie hoch ist der Preis jetzt im Vergleich zum Anfang?

J) Musterlösungen „Prozentrechnen“

12. a) $W = \frac{G \cdot p}{100} = \frac{30 \cdot 6}{100} = 1.8$
    b) $p = \frac{W \cdot 100}{G} = \frac{72 \cdot 100}{68} \approx 105.88\ \%$
    c) $G = \frac{W \cdot 100}{p} = \frac{144 \cdot 100}{12} = 1\,200$
    d) $W = \frac{G \cdot p}{100} = \frac{45 \cdot 120}{100} = 54$

13. a) Da „von 66“ steht, ist $G = 66$ und damit $W = 30. \Longrightarrow p = \frac{W \cdot 100}{G} = \frac{30 \cdot 100}{66} \approx 45.45\ \%$
    b) $G = 30, W = 66 \Longrightarrow p = \frac{W \cdot 100}{G} = \frac{66 \cdot 100}{30} = 220\ \%$

14. a) Wir haben neu $110\ \% = (100 + 10)\ \% = 1 + \frac{10}{100} = 1.10$ vom Grundwert.
    Der Endwert beträgt also $3\,000 \cdot 1.1 = 3\,300$.
    b) Wir haben neu $90\ \% = (100 - 10)\ \% = 1 - \frac{10}{100} = 0.90$ vom Grundwert.
    Der Endwert beträgt also $4\,500 \cdot 0.9 = 4\,050$.
    c) Wir haben neu $145\ \% = (100 + 45)\ \% = 1 + \frac{45}{100} = 1.45$ vom Grundwert.
    Der Endwert beträgt also $400 \cdot 1.45 = 580$.
    d) Wir haben neu $220\ \% = (100 + 120)\ \% = 1 + \frac{120}{100} = 2.20$ vom Grundwert.
    Der Endwert beträgt also $38 \cdot 2.2 = 83.6$.
    e) Wir haben neu $20\ \% = (100 - 80)\ \% = 1 - \frac{80}{100} = 0.20$ vom Grundwert.
    Der Endwert beträgt also $40 \cdot 0.2 = 8$.

15. Es handelt sich um eine prozentuale Abnahme. Grundwert $G = 50$, Endwert 48.
    Es wurde also $50 \cdot x = 48$ gerechnet und $x = \frac{48}{50} = 0.96$. Der Faktor $x = 0.96$ entspricht einer prozentualen Abnahme um $4\ \%$, da $0.96 = \frac{96}{100} = 1 - \frac{4}{100} = (100 - 4)\ \%$. Der Rabatt beträgt also $4\ \%$.

16. Es handelt sich um eine prozentuale Zunahme. Grundwert $G = 1\,340$, Endwert $1\,876$.
    Es wurde also $1\,340 \cdot x = 1\,876$ gerechnet und $x = \frac{1\,876}{1\,340} = 1.4$. Der Faktor $x = 1.4$ entspricht einer prozentualen Zunahme um $40\ \%$, da $1.4 = \frac{140}{100} = 1 + \frac{40}{100} = (100 + 40)\ \%$. Die Zunahme beträgt also $40\ \%$.

17. Der Preis ist sicherlich **nicht** gleich gross wie zu Beginn, da eine Zunahme um $60\ \%$ nicht durch eine Abnahme um $60\ \%$ rückgängig gemacht werden kann.
    Eine Zunahme um $60\ \%$ ergibt einen Faktor $160\ \% = (100 + 60)\ \% = 1 + \frac{60}{100} = 1.60$.
    Eine Abnahme um $60\ \%$ ergibt einen Faktor $40\ \% = (100 - 60)\ \% = 1 - \frac{60}{100} = 0.40$.
    Total wird also $\cdot\, 1.6 \cdot 0.4 =\cdot\, 0.64$ gerechnet. Der Faktor 0.64 entspricht einer prozentualen Abnahme um $36\ \%$, da $0.64 = \frac{64}{100} = 1 - \frac{36}{100} = (100 - 36)\ \%$. Der Preis hat also insgesamt um $36\ \%$ abgenommen.
    (Dieses Ergebnis wird einleuchtender, wenn man bedenkt, dass bei der Preissenkung $60\ \%$ vom **erhöhten** Preis weggenommen werden, also sicherlich wesentlich mehr, als bei der Erhöhung dazugekommen war.)