KANTON
LUZERN
Bildungs- und Kulturdepartement

Kantonale Fachschaft Mathematik

Repetitionsaufgaben: Lineare Gleichungssysteme

Zusammengestellt von Roman Oberholzer und Lukas Fischer, KSA

Inhaltsverzeichnis

A) Vorbemerkungen

Im Repetitionsteil wird eine Aufgabe ausführlich besprochen. Im Aufgabenteil steht für diejenigen Aufgaben, deren Zahl oder Littera eingerahmt ist, im Teil E) eine Musterlösung bereit, ansonsten sind die numerischen Lösungen im Teil F) zu finden.

B) Lernziele

- Einfache lineare Gleichungssysteme graphisch lösen können
- Die drei algebraischen Lösungsverfahren kennen und anwenden können
- Die verschiedenen Lösungsfälle (Anzahl Lösungen) kennen
- Systeme mit Bruchtermgleichungen auf 2x2-Systeme zurückführen können
- 3x3-Gleichungssysteme lösen können
- Textaufgaben mit Hilfe von Gleichungssystemen lösen können

C) Repetition

1. Einführung

Hans beobachtet in einem Obstgeschäft, wie ein Kunde 2 kg Äpfel und 1.5 kg Birnen kauft und dafür 7.20 Fr bezahlt. Ein zweiter Kunde zahlt für 3 kg Äpfel und 2 kg Birnen derselben Sorten 10.20 Fr. Auf dem Heimweg versucht Hans, den Kilopreis jeder Sorte herauszufinden.

Wählt man x als Kilopreis der Äpfel in Franken und y als Kilopreis der Birnen in Franken, lassen sich aus dem Text die beiden Gleichungen für den Gesamtpreis aufstellen:

$$2x+1.5y=7.2 \qquad \text{und} \qquad 3x+2y=10.2$$

Die Lösung für x und y müssen beide Gleichungen gleichzeitig erfüllen. So würde zum Beispiel x = 1.5 und y = 2.8 die erste, aber nicht die zweite Gleichung erfüllen. Eine Möglichkeit, eine Lösung beider Gleichungen zu finden, ist das Auflösen einer Gleichung nach einer Variablen und das Einsetzen des gefundenen Ausdruck in die andere Gleichung:

zweite Gleichung nach y auflösen: $3x+2y=10.2 \rightarrow 2y=-3x+10.2 \rightarrow y=-1.5x+5.1$

y in erste Gleichung einsetzen: $2x+1.5(-1.5x+5.1)=7.2 \rightarrow 2x-2.25x+7.65=7.2$
$\rightarrow 0.45=0.25x \rightarrow x=1.8$

x in zweiter Gleichung für y einsetzen: $y=-1.5x+5.1=-1.5(1.8)+5.1=2.4$

Die Lösung $x=1.8$ und $y=2.4$ erfüllen beide Gleichungen gleichzeitig. Somit kostet ein Kilogramm Äpfel 1.80 Fr und ein Kilogramm Birnen 2.40 Fr.

Definition

Zwei lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten heissen lineares 2x2-Gleichungssystem, geschrieben als $\left|\begin{matrix} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{matrix}\right|$. Die Lösung wird als Zahlenpaar (x/y) angegeben.

Beispiel

Das Einführungsbeispiel schriebe sich als $\left|\begin{matrix} 2x+1.5y=7.2 \\ 3x+2y=10.2 \end{matrix}\right|$ mit der Lösung (x/y) = (1.8/2.4).

2. Lösungsverfahren für 2x2-Systeme

2.1. Das graphische Verfahren

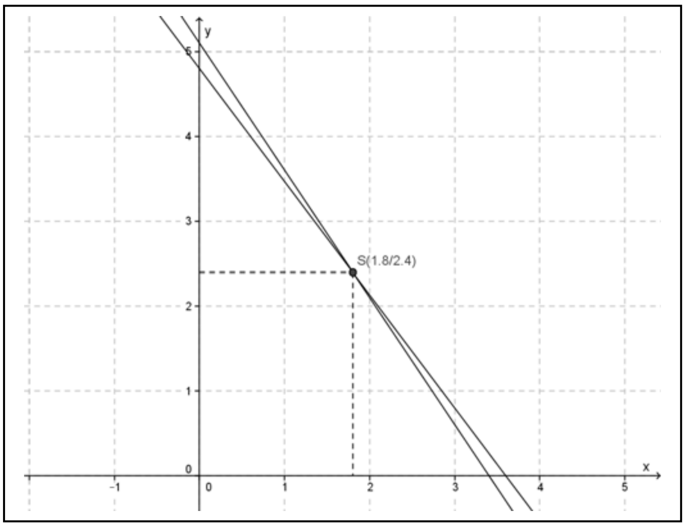
Gleichungen von linearen Systemen lassen sich nach y auflösen und als Graph einer Funktion y = f(x) darstellen.

Beispiel

Lösen wir die beiden Gleichungen

$\left| \begin{array}{l} 2x + 1.5y = 7.2 \\ 3x + 2y = 10.2 \end{array} \right|$ des Einführungsbeispiels

nach y auf, erhalten wir $y = -1.\overline{3}x + 4.8$ als erste und $y = -1.5x + 5.1$ als zweite Gleichung. Der Schnittpunkt S(1.8/2.4) der beiden Geraden ist die Lösung des linearen Gleichungssystems, da er beide Gleichungen erfüllt.



2.2. Das Gleichsetzungsverfahren

Beim Gleichsetzungsverfahren löst man beide Gleichungen nach einer Variablen auf und setzt die so erhaltenen Ausdrücke einander gleich.

Beispiel

Lösen wir die beiden Gleichungen des Einführungsbeispiels $\left| \begin{array}{l} 2x + 1.5y = 7.2 \\ 3x + 2y = 10.2 \end{array} \right|$ z.B. nach y auf, erhalten wir $y = -1.\overline{3}x + 4.8$ als erste und $y = -1.5x + 5.1$ als zweite Gleichung. Beide Ausdrücke $-1.\overline{3}x + 4.8$ und $-1.5x + 5.1$ stellen y dar, also sind sie gleich:

$$-1.\overline{3}x + 4.8 = -1.5x + 5.1$$

Aufgelöst nach x ergibt sich $0.1\overline{6}x = 0.3$ und schliesslich x = 1.8. y erhält man, indem x in eine der beiden Ausdrücke $-1.\overline{3}x + 4.8$ oder $-1.5x + 5.1$ eingesetzt wird:

$$y = -1.\overline{3}x + 4.8 = -1.\overline{3} \cdot 1.8 + 4.8 = 2.4 \rightarrow (x / y) = (1.8 / 2.4)$$

2.3. Das Einsetzverfahren

Das Einsetzverfahren entspricht dem Verfahren, das im Einführungskapitel beschrieben wurde: Man löst eine Gleichung nach einer Variablen auf und setzt diese in die andere Gleichung ein. Dadurch ergibt sich eine Gleichung mit einer Variablen, nach der aufgelöst werden kann.

Beispiel

Lösen wir die zweite Gleichung von $\left|\begin{array}{l} 2x+1.5y=7.2 \\ 3x+2y=10.2 \end{array}\right|$ nach y auf, ergibt sich $y=-1.5x+5.1$. Nun setzen wir dies in der ersten Gleichung für y ein und erhalten

$$2x+1.5(-1.5x+5.1)=7.2 \rightarrow 2x-2.25+7.65=7.2 \rightarrow 0.45=0.25x \rightarrow x=1.8$$

Schliesslich berechnen wir y, indem x in $y=-1.5x+5.1$ eingesetzt wird:

$$y=-1.5x+5.1=-1.5\cdot(1.8)+5.1=2.4 \rightarrow (x/y)=(1.8/2.4)$$

2.4. Das Additionsverfahren

Dies ist das am häufigsten angewendete Verfahren. Die Grundidee hier ist, dass eine oder beide Gleichungen so multipliziert werden, dass der Term in x oder y bis auf das Vorzeichen in beiden Gleichungen übereinstimmt. Durch Addition beider Gleichungen fällt dann diese Variable raus, und die resultierende Gleichung kann nach der anderen Variablen aufgelöst werden.

Beispiel

In $\left|\begin{array}{l} 2x+1.5y=7.2 \\ 3x+2y=10.2 \end{array}\right|$ wird die erste Gleichung mit -3 und die zweite Gleichung mit 2 multipliziert, was auf $\left|\begin{array}{r} -6x-4.5y=-21.6 \\ 6x+4y=20.4 \end{array}\right|$ führt. Nun werden die beiden Gleichungen links und rechts des Gleichheitszeichens zusammengezählt, wobei links x wegfällt: $-0.5y=-1.2$. Nach y aufgelöst ergibt sich $y=2.4$. Den Wert von x findet man, indem das berechnete y in eine Gleichung eingesetzt wird, z.B. in die erste Gleichung: $2x+1.5\cdot2.4=7.2 \rightarrow 2x+3.6=7.2 \rightarrow 2x=3.6 \rightarrow x=1.8$. Somit ist die Lösung (x/y) = (1.8/2.4).

Bemerkung

Die oben beschriebenen algebraischen Verfahren sind gleichwertig. Je nach Gleichungssystem ist das eine oder das andere Verfahren schneller/einfacher.

Lernvideos, in denen die oben beschriebenen Lösungsverfahren vorgestellt werden, finden sich unter: http://www.echteinfach.tv/funktionen/lineare-gleichungssysteme.

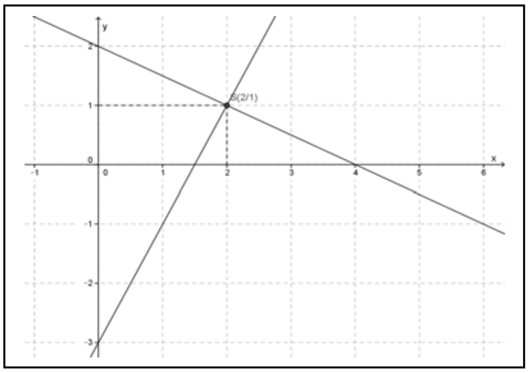
3. Untersuchung der Lösung von linearen 2x2-Systemen

Wir diskutieren die verschiedenen Lösungsfälle anhand des graphischen Lösungsverfahrens. Da jede Gleichung eines Systems durch eine Gerade dargestellt werden kann, ergeben sich für zwei Geraden folgende drei Fälle: die beiden Geraden schneiden sich in einem Punkt, sie schneiden sich nie (parallele Geraden) oder die Geraden liegen aufeinander (identische Geraden). Da Schnittpunkte der beiden Geraden Lösungen des Gleichungssystems darstellen, bedeutet dies, dass das Gleichungssystem

- genau eine Lösung hat, wenn die beiden Gleichungen zwei sich schneidende Geraden darstellen;
- keine Lösung hat, wenn die beiden Gleichungen zwei parallele Geraden darstellen;
- unendliche viele Lösungen hat, wenn die beiden Gleichungen die identische Gerade darstellen.

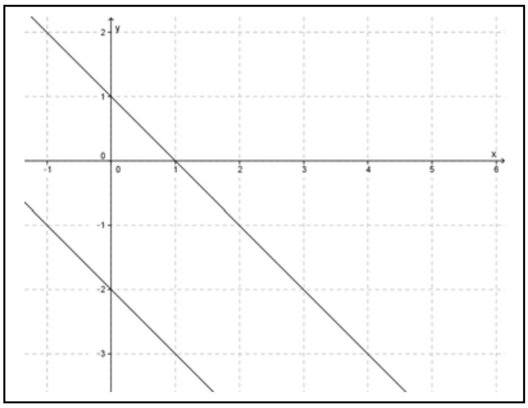
Beispiele

a) genau eine Lösung:



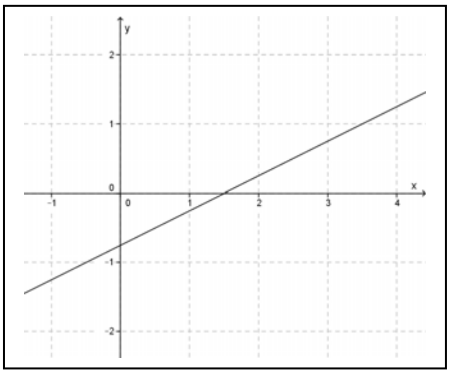
$\left|\begin{array}{l} x+2y=4 \\ 2x-y=3 \end{array}\right|$ mit $\left|\begin{array}{c} y=-\dfrac{1}{2}x+2 \\ y=2x-3 \end{array}\right|$ und Lösung (x/y) = (2/1)

b) keine Lösung:



$\left|\begin{array}{l} x+y=1 \\ x+y=-2 \end{array}\right|$ mit $\left|\begin{array}{l} y=-x+1 \\ y=-x-2 \end{array}\right|$ und Lösungsmenge $\mathbb{L}=\{\ \}$

c) unendlich viele Lösungen:



$\left|\begin{array}{l} 2x-4y=3 \\ 2y+1.5=x \end{array}\right|$ mit $\left|\begin{array}{l} y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{4} \\ y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{4} \end{array}\right|$.

In diesem Fall wird die Lösungsmenge explizit angegeben:

$\mathbb{L}=\left\{(x/y)\,/\,x\in\mathbb{R},\ y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{4}\right\}$,wobei der Ausdruck für y der Gleichung der Lösungsgeraden entspricht.

4. Systeme, die auf lineare 2x2-Systeme zurückführbar sind

Oft lassen sich nichtlineare Gleichungssysteme durch Umformung oder Substitution auf lineare zurückführen. Sobald die Lösungsvariablen im Nenner vorkommen, muss die berechnete Lösung dahingehend überprüft werden, ob kein Nenner des ursprünglichen Systems null wird. Wäre mindestens ein Nenner gleich null, müsste die Lösung verworfen werden.

4.1. Gleichungssystem mit Bruchgleichungen

Ein Gleichungssystem mit Bruchgleichungen kann man durch Multplikation mit dem Hauptnenner und Zusammenfassen gleicher Terme zu einem linearen Gleichungssystem umformen. Am Schluss muss überprüft werden, ob ein Nenner für die berechnete Lösung null wird.

Beispiel

Bestimme die Lösung des Gleichungssystems $\left| \begin{array}{c} \frac{1}{2x-3y} + \frac{1}{3x-2y} = \frac{-1}{2x-3y} \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{xy} \end{array} \right|$.

Die erste Gleichung wird mit (2x - 3y)(3x - 2y) und die zweite mit xy multipliziert:

$$\left| \begin{array}{c} 3x-2y+2x-3y=2y-3x \\ y-x=1 \end{array} \right| \text{, und vereinfacht zu } \left| \begin{array}{c} 8x-7y=0 \\ -x+y=1 \end{array} \right|$$

Nun wird die zweite Gleichung nach y aufgelöst: $y = x+1$

und in die erste eingesetzt: 8x - 7(x + 1) = 0 8x - 7x - 7 = x - 7 = 0 $x = 7$
Mit $y = x+1$ folgt $y = 8$. Kein Nenner des ursprünglichen Gleichungssystems ist für $x = 7$ und $y = 8$ gleich null, somit hat das Gleichungssystems die Lösung (x/y) = (7/8).

4.2. Substitution

Es gibt Gleichungssysteme, deren Bruchgleichungen sich durch Multiplizieren mit dem Hauptnenner nicht in lineare Gleichungen überführen lassen. In solchen Fällen kann möglicherweise eine Substitution (Ersetzung) weiterhelfen.

Beispiel

Bestimme die Lösung des Gleichungssystems $\left| \begin{array}{c} \frac{3}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{4} \\ \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = \frac{13}{12} \end{array} \right|$.

Beachte: Bei der Multiplikation der beiden Gleichungen mit dem Hauptnenner xy ergeben sich keine Gleichungen der Form ax + by = c! Wenn die Bruchterme mit den Variablen die gleiche Struktur haben, führt oft eine Substitution zum Ziel. Für das obige Beispiel lässt sich das Gleichungssystem mit der Substitution $\frac{1}{x} = u$ und $\frac{1}{y} = v$ als lineares System in u und v schreiben:

$\left| \begin{array}{r} 3u - v = \frac{1}{4} \\ 2u + 3v = \frac{13}{12} \end{array} \right|$. Mithilfe des Additionsverfahrens erhalten wir aus $\left| \begin{array}{r} 9u - 3v = \frac{3}{4} \\ 2u + 3v = \frac{13}{12} \end{array} \right|$ den Wert für u:

$11u = \frac{3}{4} + \frac{13}{12} = \frac{9+13}{12} = \frac{22}{12}$ und somit $u = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$. Setzen wir dies in eine der Gleichungen ein, ergibt sich $v = \frac{1}{4}$. Da aber x und y gesucht sind, müssen wir mit der Substitution wie folgt zurückrechnen: Mit $\frac{1}{x} = u = \frac{1}{6}$ und $\frac{1}{y} = v = \frac{1}{4}$, folgt x = 6 und y = 4. Da für x = 6 und y = 4 keiner der Nenner im ursprünglichen Gleichungssystem null wird, ist die Lösung (x/y) = (6/4).

5. 3x3 Gleichungssysteme

Wir beschränken uns auf 3x3-Gleichungssysteme mit genau einer Lösung.

Da beim Einsetzverfahren oft Brüche vorkommen, ist es oft einfacher die Gleichungssysteme mit dem Additionsverfahren zu lösen.

Beispiel:

$$\begin{vmatrix} 6x - y + 4z = -2 \\ -x + 3y - 2z = 9 \\ 3x + 2y - z = 3 \end{vmatrix}$$

Es werden zwei Mal zwei Gleichungen so kombiniert, dass jeweils die gleiche Variable wegfällt (eliminiert wird). Im Prinzip kann jede Variable eliminiert werden, konkret muss man sich aber für eine entscheiden.

In diesem Beispiel eliminieren wir z:

Wir kombinieren die erste und die zweite Gleichung. Wenn wir die 2. Gleichung mit 2 multiplizieren, sind die Koeffizienten von z in beiden Gleichungen entgegengesetzt:

$$\begin{aligned} 6x - y + 4z &= -2 \\ -2x + 6y - 4z &= 18 \end{aligned}$$

Addition der beiden Seiten der beiden Gleichungen ergibt:

$6x - 2x - y + 6y + 4z - 4z = -2 + 18$ und somit:

$4x + 5y = 16$ (*)

Nun werden die zweite und die dritte Gleichung kombiniert. Entgegengesetztes Vorzeichen der Koeffizienten von z erhalten wir, indem wir die zweite Gleichung mit (-1) multiplizieren und die dritte Gleichung mit zwei multiplizieren.

$$\begin{aligned} x - 3y + 2z &= -9 \\ 6x + 4y - 2z &= 6 \end{aligned}$$

Addition der beiden Seiten der beiden Gleichungen ergibt:
$x + 6x - 3y + 4y + 2z - 2z = -9 + 6$ und dies vereinfacht:

$7x + y = -3$ (**)

Dies ergibt zwei Gleichungen (*) und (**) mit zwei Unbekannten:

$$\left|\begin{array}{l} 4x+5y=16 \\ 7x+\ \ y=-3 \end{array}\right|$$

Kurzschreibweise

Beim Lösen von Aufgaben soll einerseits der Lösungsweg nachvollziehbar sein, andererseits der Dokumentationsaufwand so gering wie möglich sein.

Deshalb kann folgende Kurzschreibweise verwendet werden:

$$\left|\begin{array}{l} 6x-\ \ y+4z=-2 \\ -x+3y-2z=9 \\ \ 3x+2y-\ \ z=3 \end{array}\right| \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \mathrm{I}+2\,\mathrm{II}: \\ 2\mathrm{III}-\mathrm{II}: \end{array} \quad \left|\begin{array}{l} 4x+5y=16 \\ 7x+\ \ y=-3 \end{array}\right| \begin{array}{l} \mathrm{i} \\ \mathrm{ii} \end{array}$$

Nun eliminieren wir y:

$$\begin{aligned} \mathrm{i}-5\mathrm{ii}:\ 4x-5\cdot 7x+5y-5\cdot y&=16-(-5)\cdot 3 \\ -31x&=31 \\ x&=-1 \end{aligned}$$

Der Wert der Variable y kann nun gefunden werden, wenn wir den Wert für x in die Gleichung ii einsetzen:

$$\text{x in ii:}\quad 7(-1)+\ \ y=-3 \ \rightarrow\ \ y=-3+7=4$$

x, y in I: $3(-1)+2(4)-z=3 \quad \rightarrow \quad z=2$

Somit ist die Lösung (x/y/z) = (–1/4/2).

Probe:
$$\begin{array}{l} 6(-1)-\ (4)+\ 4(2)=-2\ \checkmark \\ -(-1)+3(4)-2(2)=9\ \checkmark \\ 3(-1)+2(4)-\ (2)=3\ \checkmark \end{array}$$

6. Textaufgaben

Textaufgaben kommen in verschiedenen Gebieten vor. Wir lösen Aufgaben aus den Gebieten Zahlenrätsel, Geometrie und Prozentrechnen. Als Musterbeispiel dient hier eine Geometrieaufgabe.

Beispiel: Der Umfang eines Rechtecks beträgt 40 cm. Vergrössert man die die Breite des Rechtecks um 1 cm und die Länge des Rechtecks um 2 cm, nimmt der Flächeninhalt um 31 cm^2 zu. Berechne die ursprüngliche Länge und Breite des Rechtecks.

Fett gedruckte Titel gehören zur Lösung jeder Textaufgabe.

Bestimme zwei Variablen und gib an, was sie bezeichnen:

Variable: x: Länge des Rechtecks.

y: Breite des Rechtecks.

Gleichungen:

$2x + 2y = 40$ Der Umfang beträgt 40cm.

$(x+2)\cdot(y+1) = x \cdot y + 31$ Vergrössert man die Länge um 2 cm und die Breite um 1 cm, nimmt der Flächeninhalt um 31 cm^2 zu.

Löse das Gleichungssystem mit der Methode deiner Wahl. Zuerst allerdings vereinfachen wir die Gleichungen:

$$\left|\begin{array}{c} 2x+2y=40 \\ (x+2)\cdot(y+1)=x\cdot y+31 \end{array}\right| \rightarrow \left|\begin{array}{c} x+y=20 \\ x\cdot y+x+2y+2=x\cdot y+31 \end{array}\right| \rightarrow \left|\begin{array}{c} x+y=20 \\ x+2y=29 \end{array}\right| \begin{array}{c} \text{I} \\ \text{II} \end{array}$$

Wir eliminieren die Variable x mit dem Additionsverfahren:

II – I: $y = 9$ y in I: $x + (9) = 20 \rightarrow x = 11$

Probe:

$2(11) + 2(9) = 40$ ✓

$((11)+2)\cdot((9)+1) = 13\cdot 10 = 130 = (11)\cdot(9) + 31$ ✓

Antwortsatz: Die Länge des ursprünglichen Rechtecks beträgt 11 cm, die Breite 9 cm.

D) Aufgaben

Für Aufgaben, deren Zahl oder Littera eingerahmt ist, wie z.B. **1.** $\boxed{\text{b)}}$, steht eine Musterlösung bereit!

1. Gleichungssysteme

1. Löse mit dem graphischen Verfahren!

a) $\left|\begin{array}{l} y = 2x - 2 \\ y = -x + 7 \end{array}\right|$

$\boxed{\text{b)}}$ $\left|\begin{array}{l} -2x + y = -3 \\ 6x - 2y = 10 \end{array}\right|$

c) $\left|\begin{array}{l} 6x - y = 12 \\ 2x - \frac{1}{3}y = 9 \end{array}\right|$

d) $\left|\begin{array}{l} 4x + y = -5 \\ 2y - x = 8 \end{array}\right|$

2. Löse das lineare Gleichungssystem mit dem Gleichsetzungsverfahren

a) $\left|\begin{array}{l} \frac{2}{3}x - 3y = 8 \\ 2x + y = 4 \end{array}\right|$

$\boxed{\text{b)}}$ $\left|\begin{array}{l} 3y - x = \frac{5}{12} \\ x - y = \frac{1}{12} \end{array}\right|$

c) $\left|\begin{array}{l} 5x + y = 2 \\ 2x + 3y = 19 \end{array}\right|$

d) $\left|\begin{array}{l} \frac{1}{3}x - y = -5 \\ 2x - 6y = -30 \end{array}\right|$

3. Löse das lineare Gleichungssystem mit dem Einsetzverfahren.

a) $\left|\begin{array}{l} \frac{2}{3}x - y = 1 \\ 3x + 6y = 8 \end{array}\right|$

$\boxed{\text{b)}}$ $\left|\begin{array}{l} 6x - y = -14 \\ 3x - \frac{1}{2}y = -7 \end{array}\right|$

c) $\left|\begin{array}{l} x + \frac{3}{2}y = 20 \\ 2x = 8 - 3y \end{array}\right|$

d) $\left|\begin{array}{l} 4x - 8y = -14 \\ -\frac{1}{2}x + y = \frac{7}{2} \end{array}\right|$

4. Löse das lineare Gleichungssystem mit dem Additionsverfahren.

a) $\left|\begin{array}{l} 4x + y = -5 \\ 2y - x = 8 \end{array}\right|$

b) $\left|\begin{array}{l} 3x + 2y = 9 \\ y - 3x = -18 \end{array}\right|$

$\boxed{\text{c)}}$ $\left|\begin{array}{l} 11x - 4y = 14 \\ 3x - 2y = 2 \end{array}\right|$

d) $\left|\begin{array}{l} 2x - 3y = 32 \\ 2x - 3y = -2 \end{array}\right|$

5. Löse das lineare Gleichungssystem mit der Methode deiner Wahl.

a) $\left| \begin{array}{l} y = 3x + 1 \\ y = x + 3 \end{array} \right|$

b) $\left| \begin{array}{l} 3x + 5y = -4 \\ 5x + 7y = -8 \end{array} \right|$

c) $\left| \begin{array}{l} y = 5x \\ x + 3y = 16 \end{array} \right|$

d) $\left| \begin{array}{l} 4x + y = 7 \\ 2y = -8x + 14 \end{array} \right|$

6. Löse das lineare Gleichungssystem mit der Methode deiner Wahl.

a) $\left| \begin{array}{l} x + y = 1 \\ 2x = 3y \end{array} \right|$

b) $\left| \begin{array}{l} y - 5 = x \\ x + y = 9 \end{array} \right|$

c) $\left| \begin{array}{l} 2x - 3y = -3 \\ \frac{2}{3}x + y = 21 \end{array} \right|$

d) $\left| \begin{array}{l} x = y \\ y = -x \end{array} \right|$

7. Löse das lineare Gleichungssystem mit der Methode deiner Wahl.

a) $\left| \begin{array}{l} 3x - 4y = 24 \\ 8y - 6x = -12 \end{array} \right|$

b) $\left| \begin{array}{l} -x + 3y = 1.5 \\ 2y = \frac{2}{3}x + 1 \end{array} \right|$

c) $\left| \begin{array}{l} 2x - 5y = 6 \\ 2x = 5y - 6 \end{array} \right|$

d) $\left| \begin{array}{l} \frac{1}{3}x - \frac{1}{6}y = -1 \\ 2y = 4x + 12 \end{array} \right|$

2. Gleichungssysteme die zu linearen Systemen führen

8. Führe das Gleichungssystem auf ein lineares zurück und löse es!

a) $\left|\begin{array}{l} \dfrac{2x+5}{8x+y} = \dfrac{1}{2} \\[2ex] \dfrac{5x-2y}{5x+2y} = \dfrac{19}{11} \end{array}\right|$

$\boxed{\text{b)}}$ $\left|\begin{array}{l} \dfrac{4}{x+1} + 2y = \dfrac{2x(y+3)}{x+1} \\[2ex] \dfrac{3x}{y-3} + \dfrac{4}{y+3} = \dfrac{3xy+1}{y^2-9} \end{array}\right|$

c) $\left|\begin{array}{l} \dfrac{2}{y-2} + \dfrac{9}{x-1} = \dfrac{4}{2-y} \\[2ex] \dfrac{2x}{x+3} - \dfrac{2y}{y-1} = \dfrac{-20}{xy-x+3y-3} \end{array}\right|$

d) $\left|\begin{array}{l} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{xy} \\[2ex] \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{2}{xy} \end{array}\right|$

3. Substitution

Löse das Gleichungssystem mit Hilfe einer Substitution.

9. a) $\left|\begin{array}{l} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 7 \\[2ex] \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = 1 \end{array}\right|$

$\boxed{\text{b)}}$ $\left|\begin{array}{l} \dfrac{5}{x} - \dfrac{5}{y} = \dfrac{1}{2} \\[2ex] \dfrac{7}{x} + \dfrac{3}{y} = \dfrac{41}{30} \end{array}\right|$

c) $\left|\begin{array}{l} \dfrac{2}{5x} - \dfrac{3}{y} = \dfrac{3}{10} \\[2ex] \dfrac{1}{x} + \dfrac{6}{3y} = \dfrac{7}{3} \end{array}\right|$

d) $\left|\begin{array}{l} \dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{y} = 5 \\[2ex] \dfrac{7}{x} - \dfrac{1}{2y} = 53 \end{array}\right|$

10. a) $\left|\begin{array}{l} \dfrac{2}{x+3} + \dfrac{3}{9-y} = \dfrac{11}{6} \\[2ex] \dfrac{6}{x+3} - \dfrac{4}{9-y} = -1 \end{array}\right|$

b) $\left|\begin{array}{l} \dfrac{2}{3x+2} - \dfrac{1}{y+4} = 0 \\[2ex] \dfrac{3}{y+4} + \dfrac{1}{3x+2} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right|$

c) $\left|\begin{array}{l} \dfrac{5}{x+y} - \dfrac{3}{x-y} = 4 \\[2ex] \dfrac{2}{x+y} + \dfrac{6}{x-y} = 4 \end{array}\right|$

d) $\left|\begin{array}{l} \dfrac{3}{x+y} + \dfrac{6}{x-3y} = -\dfrac{1}{8} \\[2ex] \dfrac{2}{x+y} - \dfrac{5}{x-3y} = \dfrac{1}{6} \end{array}\right|$

11. a) $\left| \begin{array}{l} \dfrac{2x}{x+y} + 2x - 2y = -8 \\ \dfrac{3x}{x+y} - 5x + 5y = 12 \end{array} \right|$ b) $\left| \begin{array}{l} \dfrac{3y}{x+5} - \dfrac{x}{3y-6} = 1 \\ \dfrac{4y}{x+5} + \dfrac{2x}{y-2} = 5 \end{array} \right|$

c) $\left| \begin{array}{l} \dfrac{1}{x+y+1} + \dfrac{3}{x-y+1} = 2 \\ \dfrac{4}{x+y+1} - \dfrac{9}{x-y+1} = 1 \end{array} \right|$ d) $\left| \begin{array}{l} \dfrac{6}{x+y} + \dfrac{2}{x+y+1} = -1 \\ \dfrac{-3}{x+y} + \dfrac{4}{x+y+1} = 3 \end{array} \right|$

4. 3x3- Gleichungssysteme

12. Löse das lineare Gleichungssystem!

a) $\left| \begin{array}{l} 2x - y + 2z = 12 \\ x - 3y + z = 11 \\ 3x + y - 3z = -11 \end{array} \right|$ $\boxed{\text{b)}}$ $\left| \begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ 2x - y - 4z = 3 \\ -x - 2y + 2z = 6 \end{array} \right|$

c) $\left| \begin{array}{l} 2x - y + z = 1 \\ -x + 2y = 1 \\ x + 2y + z = 5 \end{array} \right|$ d) $\left| \begin{array}{l} x + y - z = 4 \\ x + y = 5 \\ y + z = 1 \end{array} \right|$

5. Textaufgaben

13. Die Summe zweier Zahlen ist 17 und ihre Differenz 7. Bestimme die beiden Zahlen!

14. Die Differenz einer Zahl und dem Dreifachen einer zweiten Zahl ist 14. Bestimme die beiden Zahlen, falls die zweite Zahl ein Zehntel der ersten ist.

$\boxed{\textbf{15.}}$ Bauer Heiniger im Surental hält Schweine und Hühner. Insgesamt haben seine Tiere 594 Beine. Die Anzahl der Hühner ist um 9 grösser als die doppelte Anzahl Schweine. Wie viele Schweine und wie viele Hühner hält Bauer Heiniger?

16. Das Verkehrshaus in Luzern hat unterschiedliche Eintrittspreise für Erwachsene und Kinder. Herr und Frau Schmidiger zahlen mit ihren vier Kindern 36 Franken Eintritt. Frau Vetter und ihre drei Kinder zahlen 23 Franken. Was kostet der Eintritt für Erwachsene und Kinder?

17. Der Curling Club Regio Baden hat letztes Jahr auf Grund von 14 Neumitgliedern 7’500 Franken mehr Mitgliederbeiträge verbuchen können. Wenn ein Erwachsener 650 Franken Mitgliederbeitrag zahlt und ein Junior 250 Franken, wie viele Erwachsene und wie viele Junioren sind dann neu zum Club gestossen?

18. In einem rechtwinkligen Dreieck ($\gamma = 90°$) ist α 40° kleiner als das Dreifache von β.
Bestimme die Winkel α und β!

19. Der Umfang eines ersten Rechtecks misst 54 cm. Ein zweites Rechteck mit 3 cm grösserer Länge und 2 cm kleinerer Breite hat denselben Flächeninhalt. Wie gross sind Länge und Breite des ersten Rechtecks?

20. Um eine Grünfläche von 500 m^2 zu mähen und einen Parkplatz mit einer Fläche von 150 m^2 zu reinigen, braucht eine Firma 5 Stunden. Andererseits dauert es 9 Stunden, bis eine Grünfläche von 750 m^2 gemäht und ein Parkplatz von 300 m^2 gereinigt ist. Wie viele m^2 Gras mähen die Mitarbeiter der Firma, resp. wie viele m^2 Parkplatz reinigen sie in einer Stunde?

21. Frau Räber investiert ihre Ersparnisse, 12’000 Franken, in zwei verschiedenen Obligationen, die zu 5% und zu 3% verzinst werden. Am Ende des Jahres hat sie 450 Franken mehr auf ihrem Konto. Wie hat sie ihr Geld auf die Obligationen aufgeteilt?

22. Frau Huber hat auf ihrem Sparkonto Fr. 20'000.- und Fr. 12'000.- auf ihrem Lohnkonto.
Ihre Zinseinnahmen betragen Fr. 620.- pro Jahr. Wie gross sind die Zinssätze auf den Konten, falls der Zinssatz dem Sparkonto um 1.5 Prozentpunkte höher ist als auf dem Lohnkonto?

23. Familie Müller will Geld aufnehmen für ihr Haus und prüft Angebote verschiedener Banken. Der Kredit wird aufgeteilt in eine Ersthypothek und eine Zweithypothek. Bei Bank A würde Familie Müller bei einem Zinssatz von 3% für die Ersthypothek und 3.5% für die Zweithypothek insgesamt Fr. 18‘700 bezahlen. Bank B offeriert die Ersthypothek zu 2% und die Zweithypothek zu 4%. Der Zinsbetrag bei Bank B wäre um Fr. 900.- geringer als bei Bank A. Wie gross sind die beiden Hypotheken?

24. Das Kapital von Herrn Hug ist angelegt in zwei verschiedene Investitionen, eine zu 3%, die andere zu 4%. Er berechnet die Summe der Jahreszinse mit Fr. 4400.-. Herr Hug hat aber die Zinssätze verwechselt, in Wirklichkeit erhält er Fr. 300.- mehr. Welche Beträge hat er investiert?

E) Musterlösungen

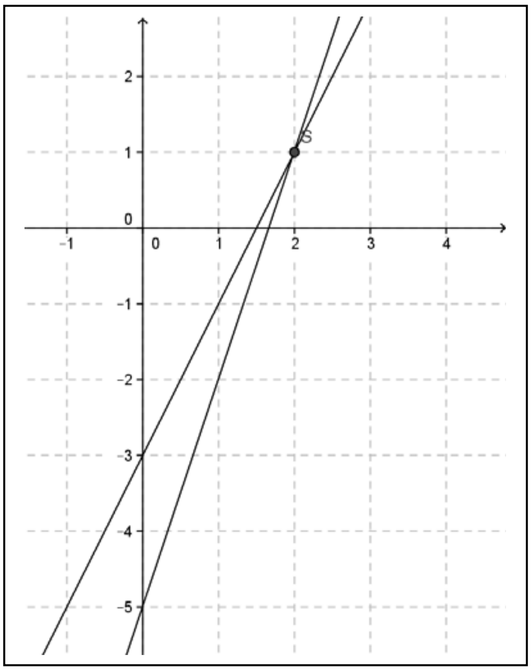
1. b) Löse die Gleichungen des Systems

$$\begin{vmatrix} -2x + y = -3 \\ 6x - 2y = 10 \end{vmatrix}$$

nach y auf und zeichne die Graphen:

$$\begin{vmatrix} y = 2x - 3 \\ y = 3x - 5 \end{vmatrix}$$

$$(x / y) = (2 / 1)$$



2. b) Löse beide Gleichungen nach x auf:

$$\begin{vmatrix} 3y - x = \frac{5}{12} \\ x - y = \frac{1}{12} \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 3y - \frac{5}{12} = x \\ x = y + \frac{1}{12} \end{vmatrix} \begin{matrix} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \end{matrix}$$

$$\mathrm{I} = \mathrm{II}:\ 3y - \frac{5}{12} = y + \frac{1}{12} \rightarrow 2y = \frac{1}{12} + \frac{5}{12} \rightarrow y = \frac{1}{4}$$

$$\text{y in II: } x = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{3}{12} + \frac{1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$(x / y) = \left(\frac{1}{3} \Big/ \frac{1}{4} \right)$$

3. b) Löse die erste Gleichung nach y auf und ersetze dann y in der zweiten Gleichung durch den ermittelten Ausdruck.

$$\begin{vmatrix} 6x - \ \ y = -14 \\ 3x - \frac{1}{2}y = \ -7 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} y = 6x + 14 \\ 3x - \frac{1}{2}y = -7 \end{vmatrix} \begin{matrix} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \end{matrix}$$

$$\text{I in II: } 3x - \frac{1}{2}(6x + 14) = -7 \quad \rightarrow \quad 3x - 3x - 7 = -7$$

$$\rightarrow \quad -7 = -7$$

$$\mathrm{IL} = \left\{ \left(x / y \right) / \ x \in \mathbb{R},\ y = 6x + 14 \right\}$$

4. c) Eliminiere y:

$$\left|\begin{array}{r} 11x-4y=14 \\ 3x-2y=\ \ 2 \end{array}\right| \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \end{array}$$

I – 2 II: $11x-6x-4y+4y=14-4 \rightarrow 5x=10 \rightarrow x=2$

x in II: $3(2)-2y=2 \rightarrow 4=2y \rightarrow y=2$

$(x/y)=(2/2)$

7. c) Ersetze 2x der ersten Gleichung mit dem Ausdruck für 2x der 2. Gleichung (Einsetzungsverfahren)

$$\left|\begin{array}{l} 2x-5y=6 \\ 2x=5y-6 \end{array}\right| \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \end{array}$$

II in I: $5y-6-5y=6 \rightarrow -6=6$

$\mathbb{L}=\{\ \}$

8. b) Multipliziere mit den Hauptnennern, vereinfache zu einem linearen Gleichungssystem:

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{4}{x+1}+2y=\dfrac{2x(y+3)}{x+1} \\[2ex] \dfrac{3x}{y-3}+\dfrac{4}{y+3}=\dfrac{3xy+1}{y^2-9} \end{array}\right| \quad \left|\begin{array}{l} \cdot(x+1) \\[2ex] \cdot(y-3)(y+3) \end{array}\right. \quad \text{ergibt:} \quad \left|\begin{array}{r} 4+2y(x+1)=2x(y+3) \\ 3x(y+3)+4(y-3)=3xy+1 \end{array}\right|$$

$$\rightarrow \left|\begin{array}{r} 4+2xy+2y=2xy+6x \\ 3xy+9x+4y-12=3xy+1 \end{array}\right| \rightarrow \left|\begin{array}{r} -6x+2y=-4 \\ 9x+4y=13 \end{array}\right| \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \end{array} \quad \text{eliminiere y:}$$

-2I + II: $21x=21 \rightarrow x=1$ $\rightarrow$ x in I: $-6(1)+2y=-4 \rightarrow 2y=2 \rightarrow y=1$

$(x/y)=(1/1)$

9. b) Substituiere: $u = \frac{1}{x}$, $v = \frac{1}{y}$

Somit wird: $\left| \begin{array}{l} \frac{5}{x} - \frac{5}{y} = \frac{1}{2} \\ \frac{7}{x} + \frac{3}{y} = \frac{41}{30} \end{array} \right|$ zu $\left| \begin{array}{l} 5u - 5v = \frac{1}{2} \\ 7u + 3v = \frac{41}{30} \end{array} \right| \begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \end{array}$

3I + 5II: $50u = 3 \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot \frac{41}{30} = \frac{9}{6} + \frac{41}{6} = \frac{50}{6} \quad \rightarrow \quad u = \frac{1}{6}$

u in I: $5\left(\frac{1}{6}\right) - 5v = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad 5v = \frac{5}{6} - \frac{1}{2} = \frac{5-3}{6} = \frac{1}{3} \quad \rightarrow \quad v = \frac{1}{15}$

Ersetze u durch x und v durch y:

$u = \frac{1}{6} = \frac{1}{x} \quad \rightarrow \quad x = 6$ $\qquad v = \frac{1}{15} = \frac{1}{y} \quad \rightarrow \quad y = 15$

$(x / y) = (6 / 15)$

12. b) eliminiere x:

$$\left| \begin{array}{rrrl} x & +y & +z & = 0 \\ 2x & -y & -4z & = 3 \\ -x & -2y & +2z & = 6 \end{array} \right|$$

$$\begin{array}{l} \mathrm{I} + \mathrm{III}: \\ 2\mathrm{I} - \mathrm{II}: \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} -y + 3z = 6 \\ 3y + 6z = -3 \end{array} \right| \begin{array}{l} \mathrm{i} \\ \mathrm{ii} \end{array}$$

Nun eliminieren wir y:

$3\mathrm{i} + \mathrm{ii}: 15z = 15 \quad \rightarrow \quad z = 1$

z in ii: $-y + 3(1) = 6 \quad \rightarrow \quad y = -3$

y, z in I: $x + (-3) + (1) = 0 \quad \rightarrow \quad x = 2$

Somit ist (x/y/z) = (2/–3/1).

Probe:
$$\begin{array}{r} (2) + (-3) + (1) = 0 \ \checkmark \\ 2(2) - (-3) - 4(1) = 3 \ \checkmark \\ -(2) - 2(-3) + 2(1) = 6 \ \checkmark \end{array}$$

15. Bauer Heiniger im Surental hält Schweine und Hühner. Insgesamt haben seine Tiere 594 Beine. Die Anzahl der Hühner ist um 9 grösser als die doppelte Anzahl Schweine. Wie viele Schweine und wie viele Hühner hält Bauer Heiniger?

Wähle Variablen und gib an, was sie bezeichnen:

Variable: x: Anzahl Schweine
y: Anzahl Hühner

Gleichungen: $4x + 2y = 594$ Insgesamt haben seine Tiere 594 Beine.
$y = 2x + 9$ Die Anzahl der Hühner ist um 9 grösser als die doppelte Anzahl Schweine.

Löse das Gleichungssystem mit der Methode deiner Wahl, hier drängt sich die Einsetzungmethode auf:

$$\left| \begin{array}{c} 4x + 2y = 594 \\ y = 2x + 9 \end{array} \right|$$

Wir setzen die zweite Gleichung (sie ist schon nach y aufgelöst) in die erste ein.

$$4x + 2(2x + 9) = 594$$

$$4x + 4x + 18 = 594$$

$$8x = 576$$

$$x = 72$$

x in die zweite Gleichung des Gleichungssystems eingesetzt ergibt: $y = 2(72) + 9 = 153$

Probe: $4(72) + 2(153) = 594$ ✓
$(153) = 2(72) + 9$ ✓

Antwortsatz: Bauer Heiniger hält 72 Schweine und 153 Hühner.

23. Familie Müller will Geld aufnehmen für ihr Haus und prüft Angebote verschiedener Banken. Der Kredit wird aufgeteilt in eine Ersthypothek und eine Zweithypothek. Bei Bank A würde Familie Müller bei einem Zinssatz von 3% für die Ersthypothek und 3.5% für die Zweithypothek insgesamt Fr. 18‘700 bezahlen. Bank B offeriert die Ersthypothek zu 2% und die Zweithypothek zu 4%. Der Zinsbetrag bei Bank B wäre um Fr. 900.- geringer als bei Bank A. Wie gross sind die beiden Hypotheken?

Wähle Variablen und gib an, was sie bezeichnen:

Variable: x: Betrag der Ersthypothek
y: Betrag der Zweithypothek

Gleichungen: $\frac{x \cdot 3}{100} + \frac{y \cdot 3.5}{100} = 18'700$ Angebot der Bank A.

$\frac{x \cdot 2}{100} + \frac{y \cdot 4}{100} = 18'700 - 900$ Angebot der Bank B.

Löse das Gleichungssystem mit der Methode deiner Wahl, nachdem es vereinfacht wurde:

$$\left| \begin{array}{l} \frac{x \cdot 3}{100} + \frac{y \cdot 3.5}{100} = 18'700 \\ \frac{x \cdot 2}{100} + \frac{y \cdot 4}{100} = 17'800 \end{array} \right| \rightarrow \left| \begin{array}{l} 3x + 3.5y = 1'870'000 \\ 2x + 4y = 1'780'000 \end{array} \right| \begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \end{array}$$

2I – 3 II: $-5y = -1'600'000 \rightarrow y = 320'000$

y in II: $2x + 4(320'000) = 1'780'000 \rightarrow x = 250'000$

Probe: $3(250'000) + 3.5(320'000) = 1'870'000$ ✓
$2(250'000) + 4(320'000) = 1'780'000$ ✓

Antwortsatz: Die Ersthypothek beträgt Fr. 250‘000, die Zweithypothek Fr. 320‘000.

F) Lösungen

1. a) (x/y) = (3/4) b) (x/y) = (2/1)

c) $IL = \{\ \}$ d) (x/y) = (-2/3)

2. a) (x/y) = (3/-2) b) (x/y) = $\left(\frac{1}{3}/\frac{1}{4}\right)$

c) (x/y) = (-1/7) d) $\mathbb{L} = \left\{(x/y) / x \in \mathbb{R}, y = \frac{1}{3}x + 5\right\}$

3. a) (x/y) = $\left(2/\frac{1}{3}\right)$ b) $\mathbb{L} = \{(x/y) / x \in \mathbb{R}, y = 6x + 14\}$

c) $IL = \{\ \}$ d) $IL = \{\ \}$

4. a) (x/y) = (-2/3) b) (x/y) = (5/-3) c) (x/y) = (2/2) d) $IL = \{\ \}$

5. a) (x/y) = (1/4) b) (x/y) = (-3/1)

c) (x/y) = (1/5) d) $\mathbb{L} = \{(x/y) / x \in \mathbb{R}, y = -4x + 7\}$

6. a) (x/y) = $\left(\frac{3}{5}/\frac{2}{5}\right)$ b) (x/y) = (2/7) c) (x/y) = (15/11) d) (x/y) = (0/0)

7. a) $IL = \{\ \}$ b) $\mathbb{L} = \left\{(x/y) / x \in \mathbb{R}, y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}\right\}$

c) $IL = \{\ \}$ d) $\mathbb{L} = \{(x/y) / x \in \mathbb{R}, y = 2x + 6\}$

8. a) (x/y) = (3/-2) b) (x/y) = (1/1)

c) (x/y) = (-2/4) d) (x/y) = $\left(-\frac{1}{2}/\frac{3}{2}\right)$

9. a) (x/y) = $\left(\frac{1}{4}/\frac{1}{3}\right)$ b) (x/y) = (6/15)

c) (x/y) = $\left(\frac{1}{2}/6\right)$ d) (x/y) = $\left(\frac{1}{7}/-\frac{1}{8}\right)$

10. a) (x/y) = (3/7) b) (x/y) = (4/3) c) (x/y) = (2/-1) d) (x/y) = (45/27)

11. a) (x/y) = (-1/2) b) (x/y) = (3/4) c) (x/y) = (1/-1) d) $IL = \{\ \}$

12. a) (x/y/z) = (1/-2/4) b) (x/y/z) = (2/-3/1) c) (x/y/z) = (5/3/-6) d) (x/y/z) = (5/0/1)

13. 5 und 12 **14.** 20 und 2 **15.** 72 Schweine und 153 Hühner

16. Erwachsene 8 Fr., Kinder 5 Fr.

17. 4 Junioren und 10 Erwachsene als Neumitglieder

18. α =57.5° und β = 32.5° **19.** Länge = 15 cm, Breite = 12 cm

20. 250 m^2 Gras und 50 m^2 Parkplatz

21. 7’500 Fr. zu 3% und 4’500 Fr. zu 5%

22. 2.5% auf dem Sparkonto und 1% auf dem Lohnkonto

23. Ersthypothek: CHF 250‘000.-, Zweithypothek CHF 320‘000.-

24. Investitionen zu CHF 50‘000.- und CHF 80‘000.-