KANTON LUZERN
Bildungs- und Kulturdepartement

Kantonale Fachschaft Mathematik

Repetitionsaufgaben
Exponential-und Logarithmusfunktion

Inhaltsverzeichnis

A) Vorbemerkungen

Exponential- und Logarithmusfunktionen werden vor allem verwendet um Wachstumsprozesse beschreiben zu können.
In der Theorie werden Grundaufgaben mit Musterlösungen angegeben.
Zudem wird gezeigt, unter welchen Bedingungen sich die Grundfunktion
$f(x) = a^x$ bzw. $f(x) = \log_a x$ verändert.
Siehe auch Repetitionsaufgaben „Textaufgaben zu Potenz-,Exponential- und Logarithmusgleichungen.
Asymptote: Ist eine Kurve, an der sich der Graph „anschmiegt“.
Die „Entdeckungen“ gelten auch für alle anderen Funktionen.

B) Lernziele

- Die Funktionsgleichung einer Exponentialfunktion kennen
- Die Funktionsgleichung einer Logarithmusfunktion kennen
- Die Funktionsgleichung unter bestimmten Bedingungen herleiten können
- Die Funktionsgleichung eines Graphen aus der Skizze bestimmen können
- Erklären können was die einzelnen Parameter in der Funktionsgleichung aussagen
- Die Funktionsgleichung einem Graphen zuordnen können
- Verstehen, dass die Exponential- und Logarithmusfunktion Umkehrfunktionen sind
- Die Umkehrfunktion bestimmen können

C) Exponentialfunktionen mit Beispielen

Bei linearen Funktionen und Polynomfunktionen tritt die Variable als Basis auf. Sobald sie jedoch als Exponent erscheint, handelt es sich um eine Exponentialfunktion.

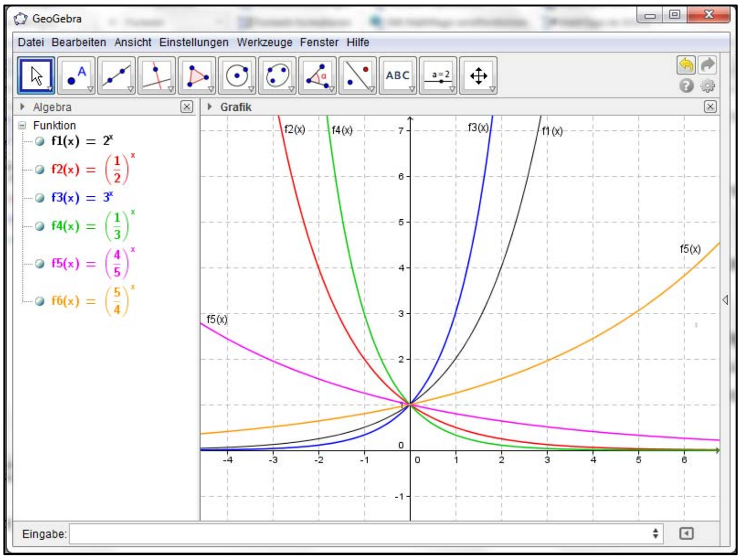
$f(x) = a \cdot b^x + c$ wobei $b > 1$ oder $0 < b < 1$ und $a, c \in \mathbb{R}$.

Grundfunktion: $f(x) = b^x$

Spezielle Exponentialfunktion: $f(x) = e^x$

Was bedeuten die einzelnen Parameter *a*, *b*, *c*? Eigenschaften der Exponentialfunktion

$f(x) = b^x$

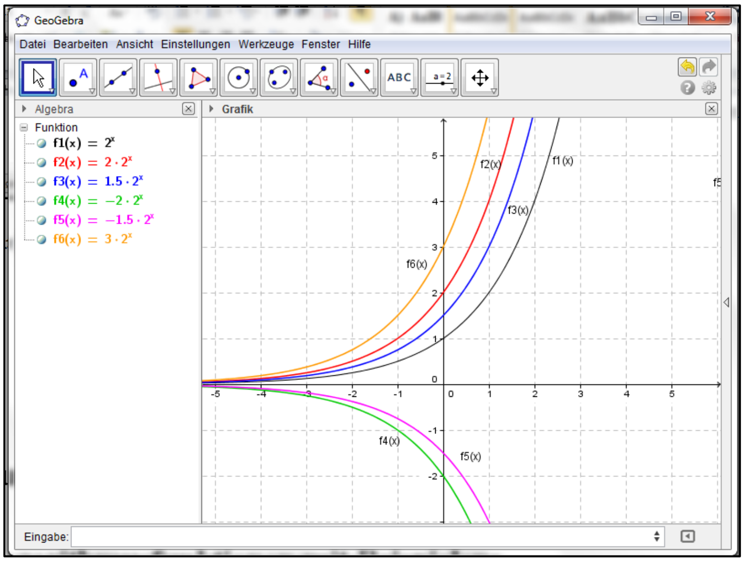


Für $b > 1$:
Die Funktionen sind streng monoton wachsend
Für $0 < b < 1$:
Die Funktionen sind streng monoton fallend
Alle Funktionen verlaufen durch den Punkt P(0/1).
Spiegelt man den Graphen von $f(x) = b^x$ an der *y*-Achse, so erhält man den Graphen von

$$g(x) = \left(\frac{1}{b}\right)^x = b^{-x}$$

Die *x*-Achse ist eine Asymptote.

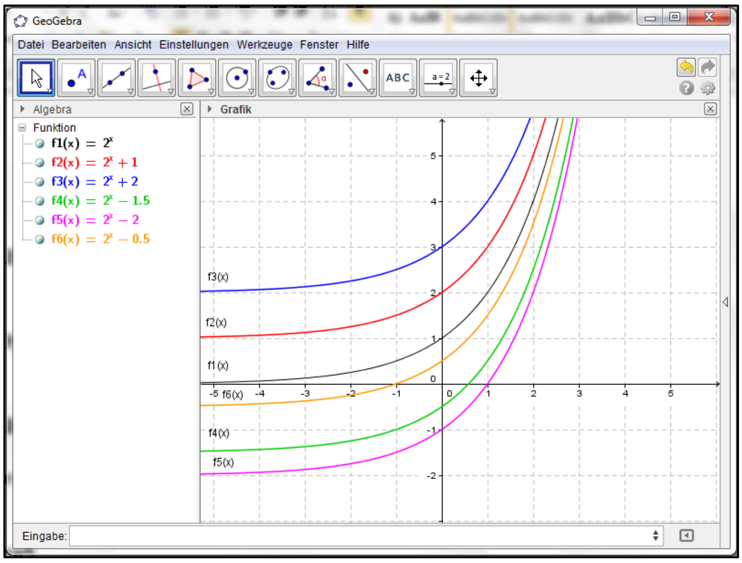
$f(x) = a \cdot b^x$



a sagt etwas aus über die Streckung bzw. Stauchung des Graphen.
Beispiele:
a = 2: Graph verläuft durch den Punkt P(0/2)
a = 3: Graph verläuft durch den Punkt P(0/3)
a ist der Streckfaktor in Richtung der *y*- Achse. Der Graph verläuft durch den Punkt P(0/*a*)

Falls *a* negativ: Spiegelung an der *x*-Achse.

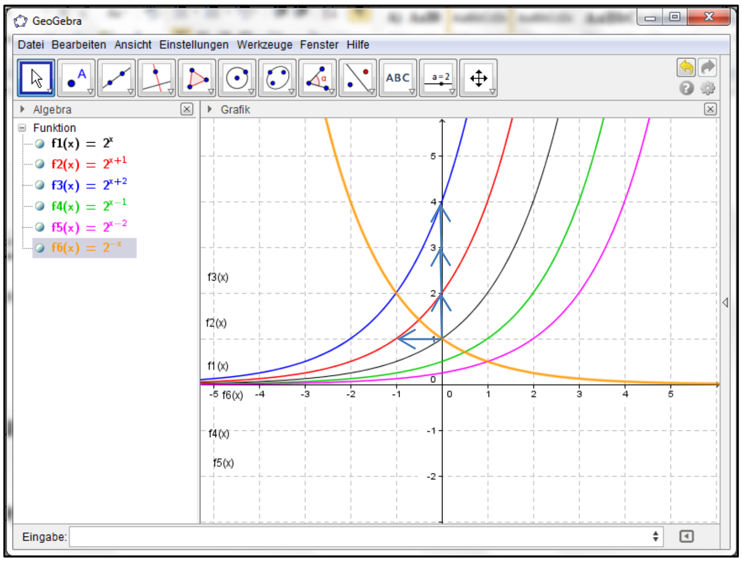
$f(x) = a \cdot b^x + c$



c sagt etwas über die Verschiebung entlang der y-Achse aus.
Beispiele:
Wenn $c = +2$: Graph zwei nach oben verschoben.
Wenn $c = -2$: Graph zwei nach unten verschoben.

Die Asymptote verschiebt sich um c Einheiten.

Was passiert, wenn ich bei *x* etwas verändere?

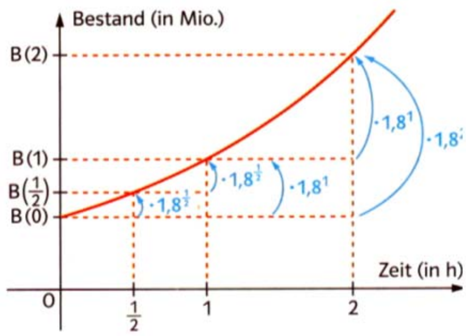


Wenn man bei x etwas ändert, kann man dies als Verschiebung entlang der x- Achse anschauen oder als Streckung bzw. Stauchung.
Beispiele:
$x+2$: Verschiebung um 2 Einheiten nach links.
$x-2$: Verschiebung um 2 Einheiten nach rechts.
Also Achtung: Bei + nach links, bei minus nach rechts.
$2^{x+1} = 2^1 \cdot 2^x = 2 \cdot 2^x$, deshalb kann man dies auch als Streckung sehen.
$-x$ ist eine Spiegelung an der y-Achse.

Angewandtes Beispiel

Eine Bakterienkultur wächst stündlich um 80%. Zu Beginn der Beobachtung wurden 50 Millionen Bakterien gezählt. Die Anzahl der Bakterien (in Millionen) nach n Stunden lässt sich mit $B(n) = 50 \cdot 1.8^n$ beschreiben.

Zeit (in Std.)	0	1	2	3	4
Bestand (in Mio.)	50	90	162	292	525

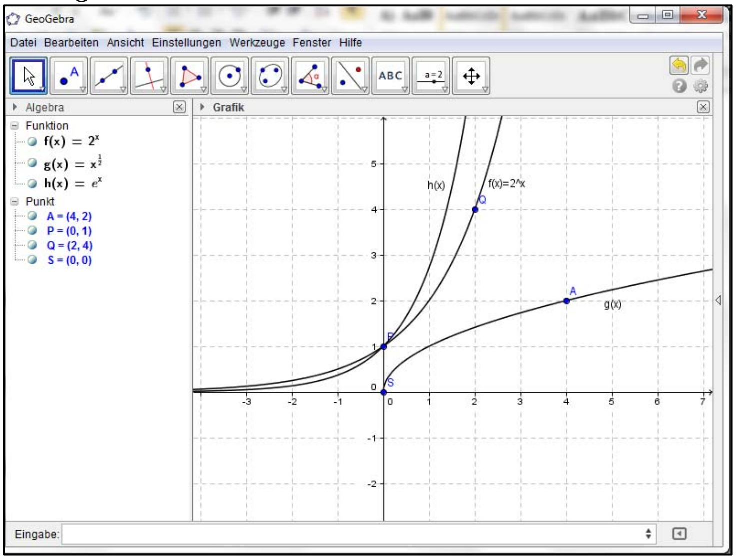


Grundaufgaben

Beispiel 1

Skizzieren Sie die Funktionen $f(x) = 2^x, g(x) = x^{\frac{1}{2}}$ und $h(x) = e^x$.

Lösung:



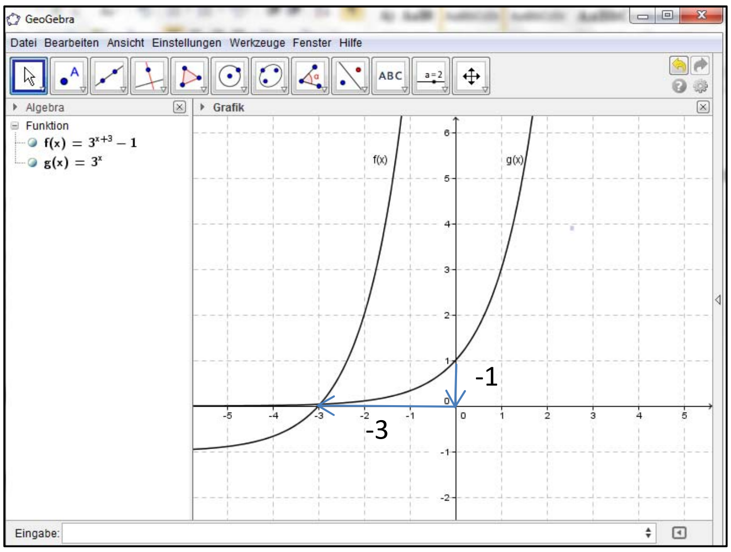
Beispiel 2

Zeichnen Sie die Funktion *f* mit $f(x) = 3^{x+3} - 1$. Überlegen Sie dazu durch welche Folge von Abbildungen sie aus einer möglichst einfachen Grundkurve entstanden ist. Berechnen Sie dann vier geeignete Kurvenpunkte für den Graphen und berechnen Sie die Nullstelle (Schnittpunkt mit der *x*-Achse) und den Schnittpunkt mit der *y*-Achse.

Lösung:

Die Funktion $g(x) = 3^x$ wird eine Einheit nach unten entlang der *y*-Achse und 3 Einheiten nach links entlang der *x*- Achse verschoben.

x	-1	0	1	2
$g(x) = 3^x$	$\frac{1}{3}$	1	3	9
x	-4	-3	-2	-1
$f(x) = 3^{x+3} - 1$	$-\frac{2}{3}$	0	2	8



Nullstellen: $y = 0$

$3^{x+3} - 1 = 0$

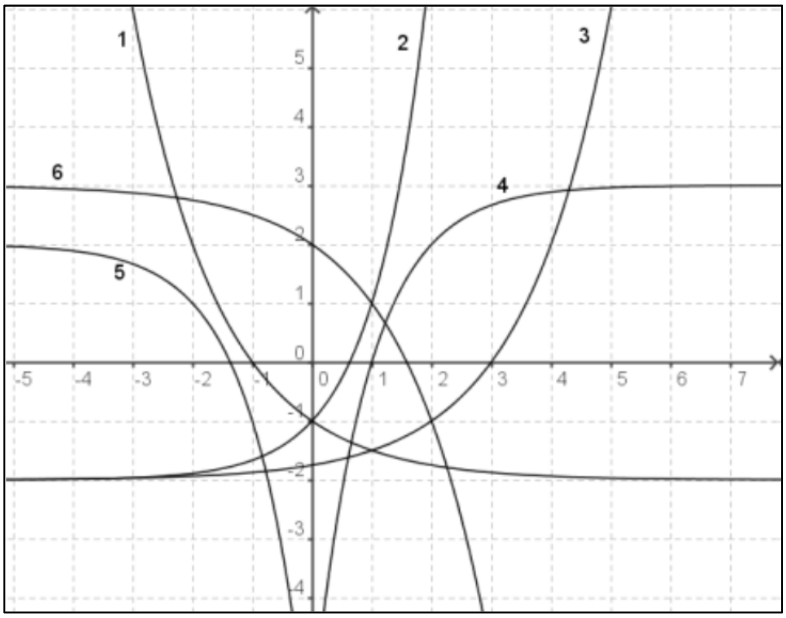
$3^{x+3} = 1 \Leftrightarrow (x+3) = \log_3 1$

$x = \log_3 1 - 3 = -3$

Schnittpunkt *y*-Achse: $x = 0$

$f(0) = 3^{0+3} - 1 = 26 \Rightarrow S_y(0/26)$

Beispiel 3
Ordnen Sie die Funktionsbilder den folgenden Funktionsgleichungen zu:
$f_1(x) = 3^x - 2$ $\quad f_2(x) = -2^x + 3$ $\quad f_3(x) = 2^{-x} - 2$
$f_4(x) = -3^{x+2} + 2$ $\quad f_5(x) = 3 - 3^{-x+2}$ $\quad f_6(x) = 2^{x+2} - 2$



Lösung:
$1 \to f_3(x)$
$2 \to f_1(x)$
$3 \to f_6(x)$
$4 \to f_5(x)$
$5 \to f_4(x)$
$6 \to f_2(x)$

Beispiel 4
Bestimmen Sie die Gleichung einer Exponentialfunktion *f* mit $f(x) = a^x$, deren Graph durch den Punkt P(3/5) verläuft.
Lösung:
Der Punkt erfüllt die Funktionsgleichung, d.h. wenn *x* = 3 ist, dann muss *y* = 5 sein.
$5 = a^3 \Rightarrow a = \sqrt[3]{5} \Rightarrow f(x) = \left(\sqrt[3]{5}\right)^x$.

Beispiel 5
Bestimmen Sie die Parameter *a* und *b* so, dass der Graph der Funktion *f* mit $f(x) = b \cdot a^x$ durch die Punkte P(0/1.5) und Q(1/1.8) verläuft.
Lösung:
Beide Punkte erfüllen die Funktionsgleichung, also können sie eingesetzt werden. Das ergibt dann zwei Gleichungen.
$I \quad 1.5 = b \cdot a^0 \Rightarrow b = 1.5$
$II \quad 1.8 = b \cdot a^1 \Rightarrow a = \frac{1.8}{1.5} = \frac{18}{15} = \frac{6}{5} = 1.2 \quad \Rightarrow f(x) = 1.5 \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^x$

Beispiel 6
Gegeben ist die Funktion *f* mit $f(x) = 2^{3x+5}$. Schreiben Sie die Funktionsgleichung in der Form $f(x) = a \cdot b^x$.
Lösung:
Wenden Sie für die Umformung die Potenzgesetze an.
$f(x) = 2^{3x+5} = 2^{3x} \cdot 2^5 = 2^5 \cdot \left(2^3\right)^x = 2^5 \cdot 8^x$

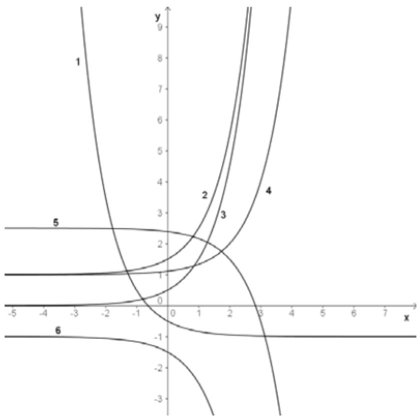
D) Aufgaben Exp.fkt. mit Musterlösungen

Aufgaben

1. Skizzieren Sie die Funktionen $f(x) = 2^x, g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{4}}$ und $h(x) = \frac{1}{e^x}$.
2. Zeichnen Sie die Funktionen $f(x) = 2^{x-2} - 2$. Überlegen Sie dazu durch welche Folge von Abbildungen sie aus einer möglichst einfachen Grundkurve entstanden ist. Berechnen Sie dann vier geeignete Kurvenpunkte für den Graphen und berechnen Sie die Nullstelle (Schnittpunkt mit der *x*-Achse) und den Schnittpunkt mit der *y*-Achse.
3. Ordnen Sie die Funktionsbilder den folgenden Funktionen zu:

$f_1(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x \qquad f_2(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x + 1 \qquad f_3(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^{-x} - 1$

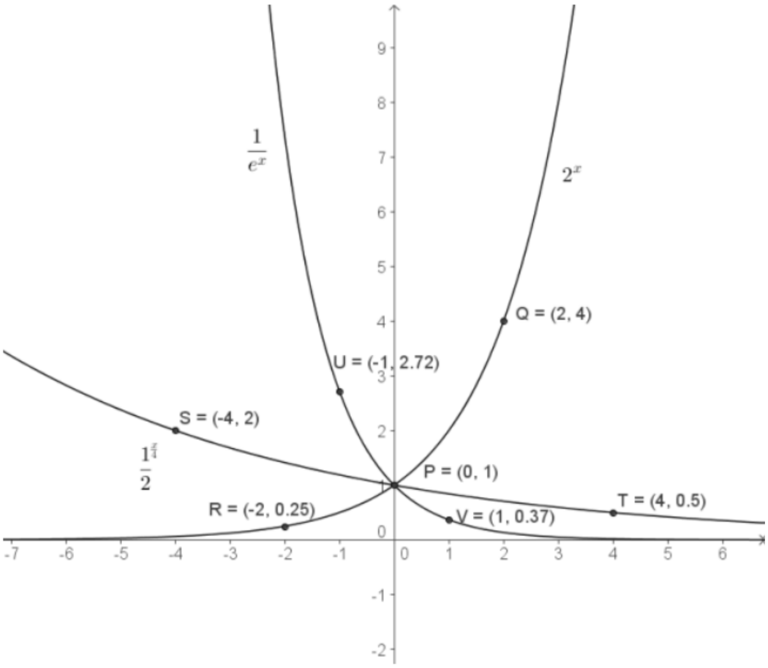
$f_4(x) = -\left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} - 1 \qquad f_5(x) = \left(\frac{3}{2}\right) - \left(\frac{3}{2}\right)^{-x+2} \qquad f_6(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^{x-2} + 1$



4. Bestimmen Sie die Parameter *a* und *b* so, dass der Graph der Funktion *f* mit $f(x) = b \cdot a^x$ durch die Punkte P(5/24) und Q(8/3) verläuft.
5. Gegeben ist die Funktion *f* mit $f(x) = \left(\sqrt{2}\right)^{5x+4}$. Schreiben Sie die Funktionsgleichung in der Form $f(x) = a \cdot b^x$.

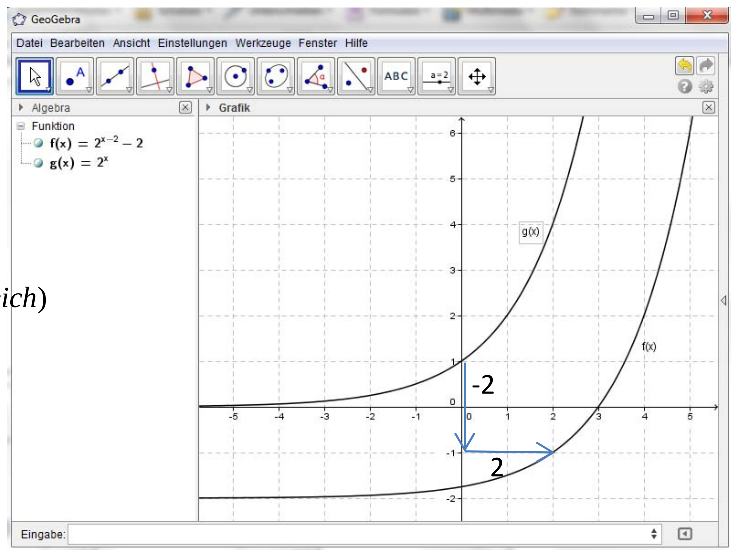
Lösungen

1.



2. Die Funktion $g(x)=2^x$ wird zwei Einheit nach unten entlang der *y*-Achse und 2 Einheiten nach rechts entlang der *x*- Achse verschoben.

x	-2	1	3	4
$g(x)=2^x$	-1	-1.5	0	2
x	-2	1	2	3
$f(x)=2^{x-2}-2$	$\frac{1}{4}$	2	4	8



Nullstellen: $y = 0$

$2^{x-2}-2=0$

$2^{x-2}=2 \Leftrightarrow (x-2)=1\ (Exponentenvergleich)$

$\Rightarrow x=3$

Schnittpunkt *y*-Achse: $x = 0$

$f(0)=2^{0-2}-2=-1.75 \Rightarrow S_y(0/-1.75)$

3. $f_1(x)=\left(\frac{3}{2}\right)^x$ $\quad f_2(x)=\left(\frac{3}{2}\right)^x+1$ $\quad f_3(x)=\left(\frac{3}{2}\right)^{-x}-1$

$f_4(x)=-\left(\frac{3}{2}\right)^{x+1}-1$ $\quad f_5(x)=\left(\frac{3}{2}\right)-\left(\frac{3}{2}\right)^{-x+2}$ $\quad f_6(x)=\left(\frac{3}{2}\right)^{x-2}+1$

$1 \to f_3(x)$
$2 \to f_2(x)$
$3 \to f_1(x)$
$4 \to f_6(x)$
$5 \to f_5(x)$
$6 \to f_4(x)$

4. $24 = b \cdot a^5 \Rightarrow b = \dfrac{24}{a^5}$

$3 = b \cdot a^8 \Rightarrow b = \dfrac{3}{a^8}$

$\text{Gleichsetzen}: b = \dfrac{24}{a^5} = \dfrac{3}{a^8} \Leftrightarrow \dfrac{a^8}{a^5} = \dfrac{3}{24} \Leftrightarrow a^3 = \dfrac{1}{8} \Rightarrow a = \dfrac{1}{2}$

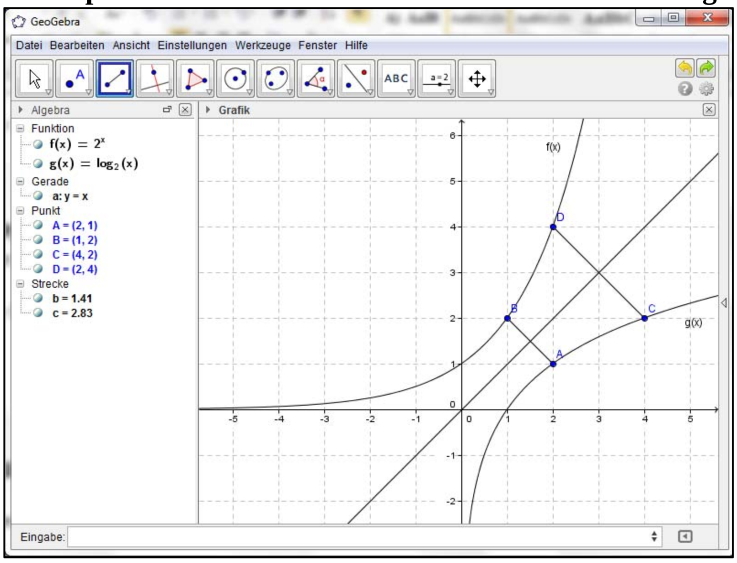
$\Rightarrow b = 768$

5. $f(x) = \left(\sqrt{2}\right)^{5x+4} = \left(\sqrt{2}\right)^{5x} \cdot \left(\sqrt{2}\right)^{4} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{5x} \cdot \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{4} = 2^{\frac{4}{2}} \cdot 2^{\frac{5}{2}x} = 2^2 \cdot 2^{\frac{5}{2}x} = 4 \cdot 2^{\frac{5}{2}x}$

E) Logarithmusfunktionen mit Beispielen

$f(x)=\log_a x+b$, wobei $a>1$ oder $0<a<1$ bzw. $a>0$ und $a\neq 1$ und $a\in\mathbb{R}$.

Die Exponentialfunktion ist die Umkehrfunktion der Logarithmusfunktion



Herleitung der Umkehrfunktion:
x und y vertauschen und wieder nach y auflösen.

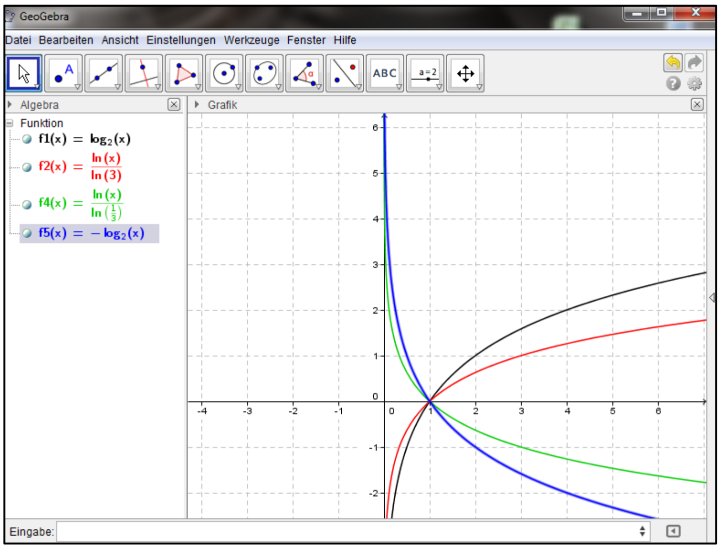
$y=a^x \Rightarrow x=a^y \Leftrightarrow (Def.Log)$

$f^{-1}(x)=y=\log_a x$

Geometrische Interpretation:
Spiegelung an der Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten.

Eigenschaften der Logarithmusfunktion

$f(x)=\log_a x$



Senkrechte Asymptote (Polgerade) ist die y- Achse.
Für $a>0$: Die Funktionen sind streng monoton steigend.
Für $0<a<1$: Die Funktionen sind streng monoton fallend.

Alle Funktionen verlaufen durch den Punkt P(1/0).

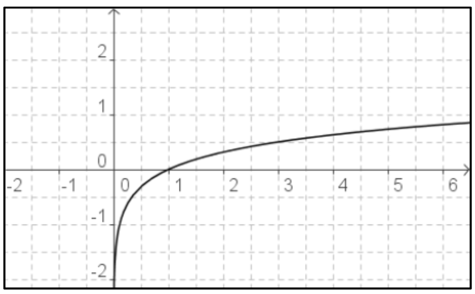
Spiegelt man den Graphen von f mit $f(x)=\log_a x$ an der x-Achse so erhält man den Graphen von g mit $g(x)=-\log_a x=\log_{\frac{1}{a}} x$.

$f(x)=\log_a x+b$

Analog zur Exponentialfunktion bedeutet das b eine Verschiebung entlang der y- Achse.

Grundaufgaben

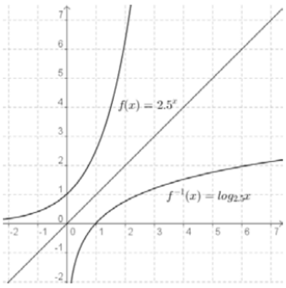
Beispiel 1
Bestimmen Sie den Parameter a in der nebenstehenden Abbildung. Wie lautet die Funktionsgleichung?



Lösung:
Einen Punkt auf der Funktion ablesen: P(3/0.5) und einsetzen in die Gleichung $f(x) = \log_a x$.

$0.5 = \log_a 3 \Leftrightarrow a^{\frac{1}{2}} = 3 \Rightarrow a = 9 \Rightarrow f(x) = \log_9 x$

Beispiel 2
Zeichnen Sie den Graphen mit der Gleichung $f(x) = 2.5^x$ und spiegeln Sie dann den Graphen an der Winkelhalbierenden des 1. & 3. Quadranten.
Wie lautet die Gleichung der Umkehrfunktion?
Bestimmen Sie den y-Wert des Punktes P(1/y) der Umkehrfunktion.
Lösung:

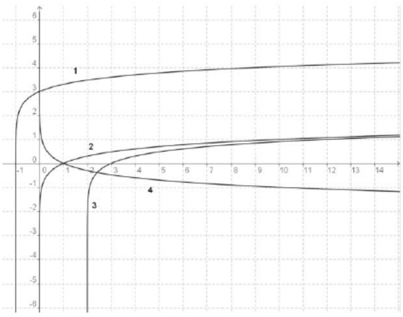


x	-1	0	1	2
$f(x) = 2.5^x$	0.4	1	2.5	6.25

$y = 2.5^x$ spiegeln $\Longrightarrow x = 2.5^y$
Nach Definition des Logarithmus: $y = \log_{2.5} x$ oder:
$y \cdot lg2.5 = lgx \Longrightarrow y = \frac{lgx}{lg2.5} \Longrightarrow y = \log_{2.5} x$
$y = \log_{2.5} 1 = 0$, P(1|0)

Beispiel 3
Ordnen Sie die Funktionsbilder den folgenden Funktionsgleichungen zu:

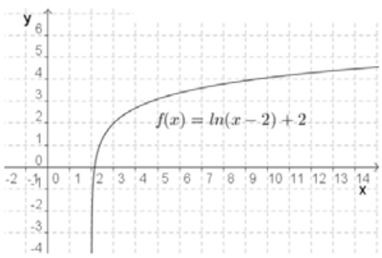
$f_1(x) = \log_{10} x$ $\quad f_2(x) = \log_{10}(x+1) + 3$ $\quad f_3(x) = -\log_{10} x$ $\quad f_4(x) = \log_{10}(x-2)$



Lösung:
$1 \rightarrow f_2(x)$
$2 \rightarrow f_1(x)$
$3 \rightarrow f_4(x)$
$4 \rightarrow f_3(x)$

Beispiel 4
Bestimmen Sie die Polgerade der Funktion f mit
$f(x) = \ln(x-2) + 2$ (Das bedeutet $\log_e(x-2)+2$). Zeichnen Sie die Funktion anschliessend in ein geeignetes Koordinatensystem.
Lösung:
Der Logarithmus ist nur für positive Zahlen definiert. D.h. $x - 2 \geq 0$
Polstelle: x= 2,

x	3	5	10	2
$f(x) = \ln(x-2) + 2$	0.4	3.0986	2.5	4.0794



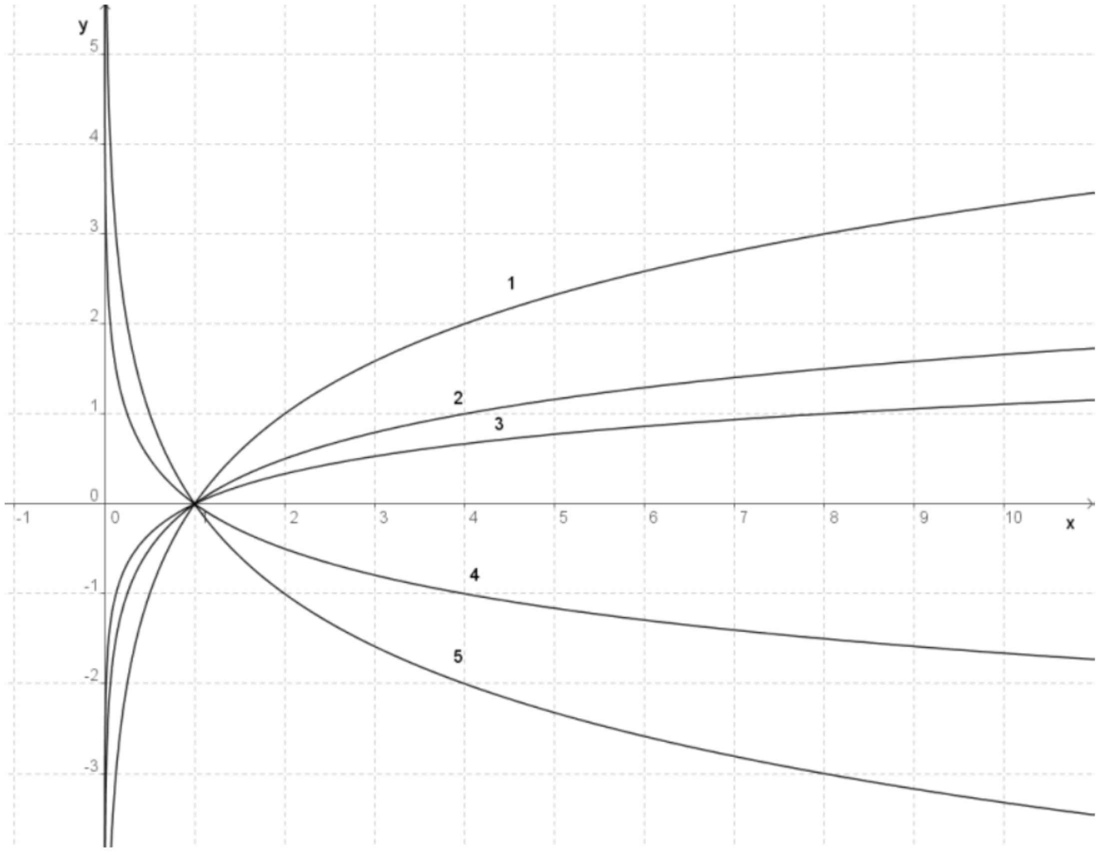
F) Aufgaben Log.fkt mit Musterlösungen

Aufgaben

1. Bestimmen Sie diejenige Logarithmusfunktion *f* mit $f(x)=\log_a x$, deren Graph durch den Punkt $P\left(5\middle|\frac{1}{4}\right)$ geht.

2. Wie lautet die Gleichung der Umkehrfunktion zur Funktion *f* mit $f(x)=\left(\frac{5}{2}\right)^x$? Berechnen Sie.

3. Bestimmen Sie die abgebildeten Logarithmusfunktionen mit $f(x)=\log_a x$:



Lösungen

1. Der Punkt $P\left(5\middle|\frac{1}{4}\right)$ erfüllt die Funktionsgleichung, also kann man ihn einsetzen.

$$\frac{1}{4}=\log_a 5 \Leftrightarrow a^{\frac{1}{4}}=5 \Leftrightarrow \sqrt[4]{a}=5 \Rightarrow a=625 \Rightarrow f(x)=\log_{625} x$$

2. $f(x)=\left(\frac{5}{2}\right)^x$ $\quad$ x und y vertauschen

$x=\left(\frac{5}{2}\right)^y$ $\quad$ nach y auflösen / Def. Log.

$f^{-1}(x)=y=\log_{\frac{5}{2}} x$ $\quad$ Umkehrfunktion

3.

1 $f(x) = \log_2 x$
2 $f(x) = \log_4 x$
3 $f(x) = \log_8 x$
4 $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$
5 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$