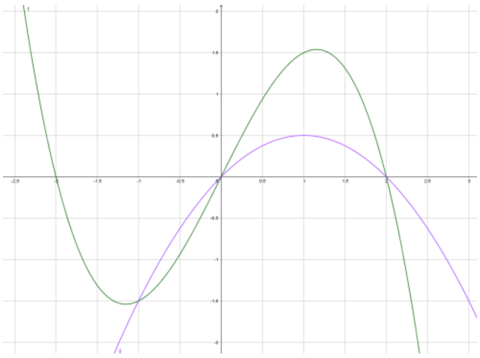
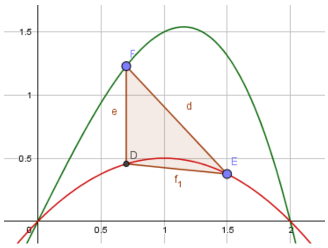
Kurzlösungen – Serie A

Aufgabe 1

a) Nullstellen von *f*: $x_1 = -2, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 2$ Nullstellen von *g*: $x_4 = 0, \quad x_5 = 2$
Hochpunkt $H(1.155 / 1.540)$ Hochpunkt $H(1 / 0.5)$
Tiefpunkt $T(-1.155 / -1.540)$

b)

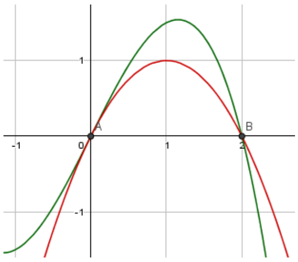




c) Schnittpunkte $S(2/0)$, Schnittwinkel $\alpha = 30.964°$

d) $F_\vartriangle(u) = \frac{1}{2} \cdot (1.5 - u) \cdot \left(f(u) - g(u) \right)$
$F_\vartriangle'(u) = 0 \quad \Rightarrow \quad u_1 = -0.603, \quad u_2 = 0.699, \quad u_3 = 1.778 \quad \Rightarrow$ nur u_2 kommt als Lösung in Frage

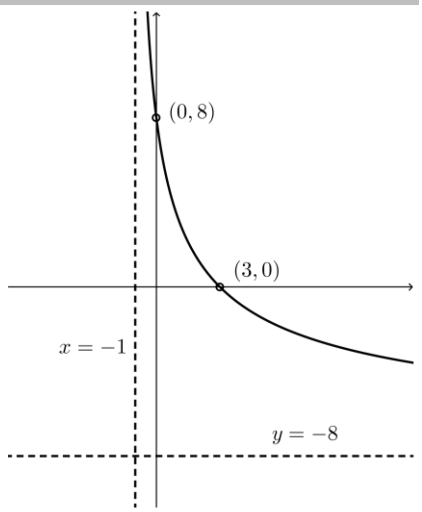
e) Schnittpunkte von *f* und g_a: $x_1 = 0, \quad x_2 = 2 \cdot (a-1), \quad x_3 = 2$
Nur eine Fläche, wenn die beiden Graphen genau zwei Schnittpunkte haben.



Genau zwei Schnittpunkte, wenn $x_1 = x_2$, also $0 = 2 \cdot (a-1)$, dann gilt **a = 1**

oder wenn $x_2 = x_3$, also $2 \cdot (a-1) = 2$, dann gilt **a = 2**.

Aufgabe 2



a) **Definitionsmenge:**

ID$_f$ = $\{ x \in \mathbb{R} \mid x > -1 \}$, weil $\sqrt{x+1}$ im Nenner steht

Vertikale Asymptote:

x = –1, weil dann der Nenner Null ist

Horizontale Asymptote:

y = –8, weil $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{16 - 8\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{16}{\sqrt{x+1}} - 8 = -8$

Schiefe Asymptote: keine

Achsenschnittpunkte:

y-Achse: $f(0) = 8 \quad \Rightarrow$ A_y(0 | 8) | x-Achse: $f(x) = 0 \quad \Rightarrow$ x = 3 $\Rightarrow$ A_x(3 | 0)

b) $A = \int\limits_0^3 f(x)dx = \left[-8\left(\sqrt{x+1} - 2\right)^2 \right]_0^3 = 8$

c) Quadratseite s = 16, weil $g(1)=16$ $\qquad V=\pi\cdot 16^2\cdot 16-\pi\int_1^{17} g^2(x)dx \approx 10'589.36$

d) $g'(x)=\frac{-8}{x\sqrt{x}}$ $\qquad x_p \approx 5.40$ und $y_p = g(x_p) \approx 6.89$

Aufgabe 3

a) ***F*: x – y + 4z – 15 = 0**

b) Abstand S zu E: $d(S,E)$ = **6**

c) z_L = **8** und p = **13**

d) $\measuredangle(E,g) = 32.31°$

e) Durchstosspunkt der Geraden g bei der Ebene E: $C(-10\,|\,6\,|\,1)$

f) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}8\\-8\\-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-6\\-3\\-6\end{pmatrix}=-48+24+24=0 \quad\Rightarrow\quad \measuredangle(ABC)=90°$

Volumen = 1/3 · Grundfläche · Höhe = $\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|\right)\cdot d(S,E)$ = **108** Höhe = 6 [siehe b)]

Teilaufgaben f) mit $C(-14\,|\,4\,|\,-3)$

f) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}8\\-8\\-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-10\\-5\\-10\end{pmatrix}=-80+40+40=0 \quad\Rightarrow\quad \measuredangle(ABC)=90°$

Volumen = 1/3 · Grundfläche · Höhe = $\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|\right)\cdot d(S,E)$ = **180** Höhe = 6 [siehe b)]

Aufgabe 4

a) $\mathbf{151'200}$ und $\mathbf{16'800}$

b) Für das erste Bild gibt es 200 Möglichkeiten, für das zweite Bild – da es anders sein muss – 199 Möglichkeiten, für das dritte Bild noch 198 usw.
Da es insgesamt 200^5 mögliche Bildzusammenstellungen gibt, ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$\frac{200\cdot 199\cdot 198\cdot 197\cdot 196}{200^5} \approx \mathbf{0.9509}$$

Fünf gleiche Tierbilder:

$$\frac{200\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1}{200^5} = \mathbf{6.25\cdot 10^{-10}}$$

c) $\approx \mathbf{0.7897}$

d)

x_i	0	1	2	3	4	5
p(X=x_i)	0.51291	0.36636	0.10468	0.01495	0.00107	0.00003

E(X) = **0.625**

e) Anzahl Päckchen: $\frac{34.49}{5} \approx 6.9$ Ein Kind benötigt also **mind. 7 Päckchen.**

Kurzlösungen — Resultate

Aufgabe 1 Kurzlösung [Vektorgeometrie]

a) Somit ist *E*: $y + 2z - 24 = 0$

b)

$$P\left(\frac{34}{7} / \frac{82}{7} / \frac{43}{7}\right) \approx P(4.86 / 11.71 / 6.14)$$

c) gesuchter Winkel $127{,}88° - 90° = 37{,}88°$

d)

h$\cap$*E* ergibt : $F\left(14 / \frac{54}{5} / \frac{33}{5}\right) \approx F(14 / 10.8 / 6.6)$

Abstand = $\left|\overrightarrow{SF}\right| = \left| -\frac{16}{5} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \frac{16}{5} \cdot \sqrt{1+4} = \frac{16\sqrt{5}}{5} \approx 7{,}16$

e) $D(3 / 12 / 6)$

Aufgabe 2 Kurzlösung [Analysis]

$$f(x) = \frac{1}{36}x^4 + \frac{1}{6}x^3$$

Aufgabe 3 Kurzlösung [Analysis]

a) $M(1|-2)$

b)

$$A = 4\sqrt{2} - \frac{13}{4} \approx 2.4069$$

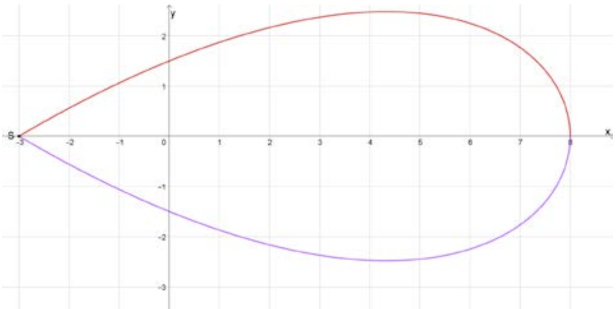
c) Bestimmen Sie die Gleichungen aller Asymptoten des Graphen.

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und somit ist $x = 0$ die vertikale Asymptote.

Schiefe Asymptote $y = 2x - 5$

Aufgabe 4 Kurzlösung [Analysis]

a)



b)

$$\alpha = 2 \cdot \arctan\left(f'(-3)\right) \approx \underline{\underline{60.766°}}$$

c) $f'(x_m) = 0 \Rightarrow x_m = \frac{13}{3}$ $\qquad b_{\max} = 2 \cdot f(x_m) = \underline{\underline{\frac{11\sqrt{66}}{18}}} \approx 4.965$

d) $A = 2 \cdot \int_{-3}^{8} f(x)\,dx = \underline{\underline{\frac{121 \cdot \sqrt{22}}{15} \approx 37.836}}$

e) $V = \pi \cdot \int_{-3}^{8} f^2(x)\,dx = \underline{\underline{\frac{14'641}{384}\pi \approx 119.781}}$

f) $\underline{\underline{r = 2.28 \qquad h = 5.5}}$

Aufgabe 5 Kurzlösung [Wahrscheinlichkeitsrechnung]

a) $\frac{6!}{2!3!} = 60$

b) $\frac{5!}{3!} = 20$

c) P("zwei weisse Kugeln und eine blaue Kugel") $= \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$

d) P("mindestens zwei roten Kugeln") $= 1 - P$("keine rote Kugel") $- P$("eine rote Kugel") $=$

$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{10} - \binom{10}{1}\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{9} = 0.515$

e) e₁) P("aus drei Kugeln mindestens zwei blaue") $= \frac{\binom{3}{2}\binom{3}{1}+\binom{3}{3}\binom{3}{0}}{\binom{6}{3}} = \frac{1}{2}$

e₂) P("noch alle Farben vertreten") $= \frac{\binom{3}{2}\binom{2}{1}}{\binom{6}{3}} = \frac{3}{10}$

f) X sei der Gewinn pro Spiel

$P(X = 16) = \frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{15}$

$P(X = 4) = \frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{5} = \frac{2}{15}$

$P(X = -3) = 1 - P(X = 16) - P(X = 4) = 1 - \frac{1}{15} - \frac{2}{15} = \frac{12}{15}$

Das Spiel ist unfair, da $E(X) = -3\cdot\frac{12}{15} + 4\cdot\frac{2}{15} + 16\cdot\frac{1}{15} = -\frac{12}{15} < 0$ gilt.

Der Spieler muss z Fr. zahlen.

Das Spiel ist fair, wenn $-z\cdot\frac{12}{15} + 4\cdot\frac{2}{15} + 16\cdot\frac{1}{15} = 0$ gilt. Somit ergibt sich $z = 2$ Fr.

Kurzlösungen — Resultate

Aufgabe 1 Kurzlösung [Vektorgeometrie]

a. Z.B.: $\varepsilon:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\0\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}0\\10\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-10\\10\\2\end{pmatrix}$ bzw. ε: x +5z-10 = 0

b. $\alpha \approx 11.3°$

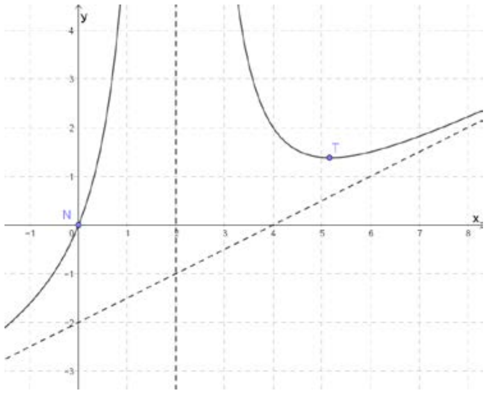
c. Schnittpunkt *S*'(-15|10|5)

d. $\beta \approx 54.74°$

e. $T(15|28|40)$

f. *R*(5|5|22.5) $d = 7.5$

Aufgabe 2 Kurzlösung [Analysis]



a. $D_f = \mathbb{R}\setminus\{2\}$, Asymptoten:
vertikal $x = 2$ (ohne Vorzeichenwechsel),
schief: $y = \frac{1}{2}x - 2$, Nullstellen: *x* = 0,
Tiefpunkt $T(5.175|1.381)$, keine Wendepunkte

b. $A = \frac{49}{3}$

c. $A_b = 8 - \dfrac{8}{b-2}$; $A = 8$

Aufgabe 3 Kurzlösung [Analysis]

a. $D_f = (-\infty, b]$

b. Zwei Nullstellen: $b > a$; eine Nullstelle $a \geq b$

c. $a = 2,\ b = 5$

d. $f''(x) = 0$, TR gibt aus: $x = 4$, aber $4 \notin D$

e. $\alpha = 60°$

f. $V = \frac{27}{4}\pi$

g1. $l_1: y = \sqrt{3-u}\cdot x \quad m = \dfrac{f(u)}{u} = \sqrt{3-u} \qquad l_2: y = -\dfrac{1}{\sqrt{3-u}}(x-u) + u\cdot\sqrt{3-u}$

g2. $Q(2|2)$

Aufgabe 4 Kurzlösung [Wahrscheinlichkeit]

a. 6

b1. 7776 b2. 4651 b3. 450

c. P(Maximalgewinn)= $\dfrac{5}{324}$;

d1. 92.5% d2. 7.5%

e. mindestens 193 Runden.

f. $27.\overline{7}\%$

g. -1.8

Kurzlösungen — Resultate

Aufgabe 1 Kurzlösung [Analysis]

a) $t = 2$ (h), $f(2) = 20/e \approx 7.36$ (mg/l)
b) $t = 4$ (h)
c) 5.34 (mg/l)
d) Tangente : $y = -20/e^3 \cdot t + 180/e^3$, Konzentration gleich null für $t = 9$ (h)
e) $b = \frac{1}{4}$, $a = \frac{5e}{2} \approx 6.80$

Aufgabe 2 Kurzlösung [Vektorgeometrie]

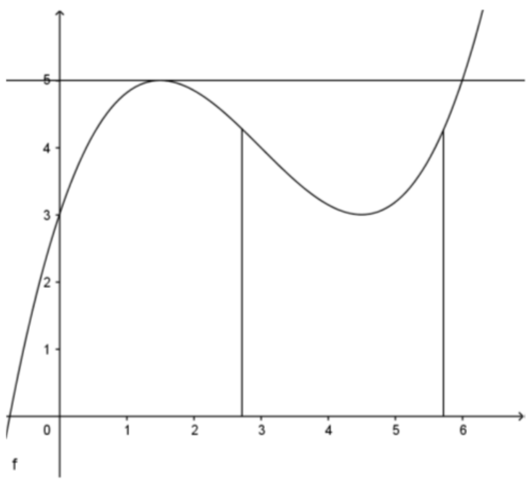
a) $\alpha = \arccos\left(\frac{34}{\sqrt{53}\cdot\sqrt{50}}\right) \approx 48.7°$
b) 19.3
c) $7x + 9y - 6z - 7 = 0$
d) $\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$, $\rightarrow$ $h = \left|\overrightarrow{SD}\right| \approx 12.9$
e) $H_B(\frac{1}{25} / -\frac{2}{5} / -\frac{43}{25})$

Aufgabe 3 Kurzlösung [Analysis]

a) $f(x) = \frac{4}{27}x^3 - \frac{4}{3}x^2 + 3x + 3$
b) HP($\frac{3}{2}$/5), TP($\frac{9}{2}$/3) , mit Ersatzfunktion: HP(2/5), TP(6/3) , Skizze (vgl. unten) analog
c) $V = \pi\int_{1.5}^{6} 5^2\,dx - \pi\int_{1.5}^{6}(f(x))^2\,dx = \frac{2997\pi}{70} \approx 134.51$

mit Ersatzfunktion: $V = \pi\int_{2}^{8} 5^2\,dx - \pi\int_{2}^{8}(f(x))^2\,dx = \frac{1998\pi}{35} \approx 179.34$

d) A minimal für $k_1 = \frac{3+\sqrt{6}}{2} \approx 2.72$, mit Ersatzfunktion: A minimal für $k_1 = \frac{5+\sqrt{13}}{2} \approx 4.30$



Aufgabe 4 Kurzlösung [Stochastik]

a) $n \geq 17.2$ also mindestens 18 Würfe

b) $P(\text{Summe} \leq 5) = \frac{7}{24} \approx 29.17\%$

c) $P(E \mid A) = \dfrac{P(E \cap A)}{P(A)} \approx 80.82\%$

Aufgabe 5 Kurzlösung [Stochastik]

a) 16.65% , 27.21% , 72.79%
b) CHF 12250.-
c) CHF 91.13