KANTON LUZERN
Bildungs- und Kulturdepartement

Kantonsschule Alpenquai Luzern

Schriftliche Maturitätsprüfung 2018

Fach	Grundlagenfach Mathematik
Prüfende Lehrpersonen	Essodinam Alitiloh essodinam.alitiloh@edulu.ch Markus T. Schmid markust.schmid@edulu.ch Roel Zuidema roel.zuidema@edulu.ch
Klassen	6a, 6c, 6e
Prüfungsdatum	Freitag, 25. Mai 2018
Prüfungsdauer	180 Minuten
Erlaubte Hilfsmittel	- Formelsammlung «Formeln, Tabellen, Begriffe» - Taschenrechner: TI-Voyage200 (ohne Handbuch), zusätzlich ein Rechner vom Typ TI-30
Anweisungen zur Lösung der Prüfung	- Es wird Wert auf eine saubere Darstellung gelegt. - Jede Aufgabe soll einen vollständigen und nachvollziehbaren Lösungsweg enthalten. - Jede Aufgabe soll auf einem neuen Bogen begonnen werden. - Jeder Bogen ist mit dem Namen zu beschriften.
Anzahl erreichbarer Punkte	Aufgabe 1: 13 Aufgabe 2: 9 Aufgabe 3: 12 Aufgabe 4: 10 Total: 44 Für die Note 6 werden mindestens 40 Punkte benötigt.
Anzahl Seiten (inkl. Titelblatt)	5

	a	b	c	d	e	Punkte
Aufgabe 1 – Analysis	3	2	2.5	3	2.5	**13**

Gegeben sind die Funktionen $f(x) = 2x - \frac{1}{2}x^3$ und $g(x) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot (2-x)$.

a) Bestimmen Sie die Nullstellen sowie die Hoch- und Tiefpunkte der Funktionen f und g.

b) Zeichnen Sie die Graphen der beiden Funktionen f und g in ein Koordinatensystem.
[1 Einheit = 4 Häuschen]

c) Bestimmen Sie den Schnittwinkel der beiden Graphen der Funktionen f und g im gemeinsamen Schnittpunkt S mit positiver x-Koordinate (x_s > 0).

d) Die drei Punkte $D(u \mid g(u))$, $E(1.5 \mid g(1.5))$ und $F(u \mid f(u))$ bilden ein Dreieck.
Für welches u im Intervall $]0; 1.5[$ ist der Flächeninhalt des Dreiecks DEF maximal?

Gegeben ist zudem die Funktionenschar $g_a(x) = a \cdot x \cdot (2-x)$ mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

e) Bestimmen Sie die Schnittpunkte der beiden Graphen der Funktionen f und g_a.
Wie muss a gewählt werden, damit die beiden Graphen der Funktionen f und g_a genau eine endliche Fläche einschliessen?

	a	b	c	d	**Punkte**
Aufgabe 2 – Analysis	3	1	2.5	2.5	9

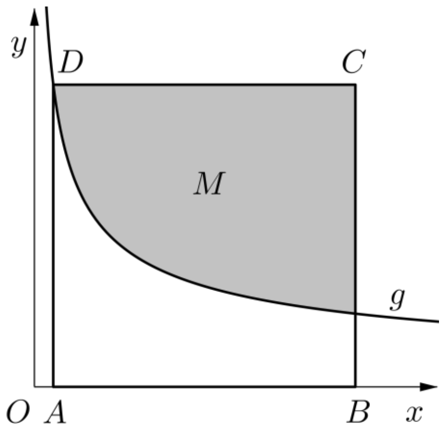
Gegeben ist die Funktion $f(x)=\dfrac{16-8\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}$.

a) Geben Sie die Definitionsmenge der Funktion f an und bestimmen Sie alle möglichen Asymptoten und Achsenschnittpunkte des Graphen der Funktion f.
Erstellen Sie aufgrund der obigen Resultate eine Skizze des Graphen der Funktion f.

b) Die Fläche A wird von den beiden Koordinatenachsen und vom Graphen der Funktion f eingeschlossen. Bestimmen Sie den Flächeninhalt der Fläche A.

Der Graph von $g(x)=\dfrac{16}{\sqrt{x}}$ ist eine Verschiebung des Graphen der Funktion f.

Die Punkte $A(1\,|\,0)$ und $B(x_B\,|\,0)$ sind Eckpunkte des Quadrats $ABCD$. Der Eckpunkt D liegt auf dem Graphen der Funktion $g(x)=\dfrac{16}{\sqrt{x}}$ (siehe Abbildung rechts).



M ist der Teil des Quadrats $ABCD$, der sich über dem Graphen von g befindet. Lässt man das Flächenstück M um die x-Achse rotieren, so entsteht ein Rotationskörper mit Volumen V.

c) Berechnen Sie dieses Volumen V.

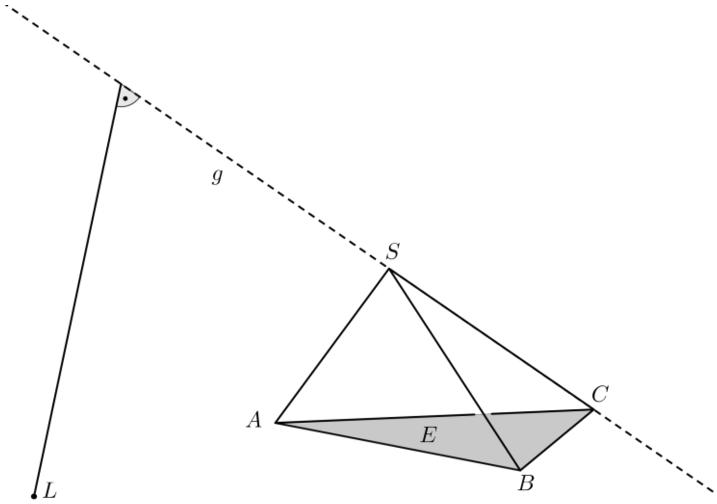
d) Der Punkt P liegt auf dem Graphen der Funktion g, sodass die Normale durch den Punkt P auch durch den Punkt A verläuft.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes P [auf zwei Dezimalstellen gerundet].

	a	b	c	d	e	f	Punkte
Aufgabe 3 – Vektorgeometrie	1.5	2.5	3	2	1	2	**12**

Gegeben sind die Punkte $A(4|1|3)$, $B(-4|9|7)$ und $S(-4|-3|4)$

sowie die Ebene $E:\ -x-2y+2z=0$

und die Gerade $g:\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.



a) Die Punkte A, B und S liegen in der Ebene F. Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene F.

b) Bestimmen Sie den Abstand zwischen dem Punkt S und der Ebene E.

c) Der Punkt $L(22|-3|z_L)$ liegt in der Ebene E und hat einen Abstand von $6\cdot\sqrt{p}$ zur Geraden g. Bestimmen Sie z_L und p.

d) Bestimmen Sie den Winkel zwischen der Ebene E und der Geraden g.

e) Der Punkt C liegt sowohl auf der Geraden g als auch in der Ebene E.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes C.

Falls Sie bei Teilaufgabe e) keine Lösung gefunden haben, können Sie bei der Teilaufgabe f) mit $C(-14|4|-3)$ weiterrechnen.

f) Zeigen Sie, dass im Dreieck ABC der Innenwinkel bei der Ecke B rechtwinklig ist und bestimmen Sie das Volumen der Pyramide $ABCS$.

	a	b	c	d	e	Punkte
Aufgabe 4 – Wahrscheinlichkeitsrechnung	2.5	1.5	1.5	2.5	2	**10**

In einer Warenhauskette erhalten Kunden pro ausgegebenen 20 Franken ein Päckchen mit fünf Tierbildern, die in ein Sammelalbum eingeklebt werden können. Im Sammelalbum sind Plätze für insgesamt 200 verschiedene Bilder vorgegeben. Die Bilder werden jeweils in sehr grosser Stückzahl mit der gleichen Häufigkeit produziert und auf die Päckchen zufällig verteilt, wobei sich die Bilder in einem Päckchen nicht unterscheiden müssen.

Peter erhält zwei Päckchen von seinem Vater. Zwei Bilder sind doppelt und ein Bild sogar dreifach vorhanden. Peter legt die 10 Bilder zufällig in einer Reihe nebeneinander aus.

a) Wie viele unterschiedliche Reihenfolgen sind möglich und wie viele dieser möglichen Reihenfolgen beginnen mit zwei identischen Bildern?

b) Begründen Sie in wenigen Sätzen, dass der Term $\frac{200 \cdot 199 \cdot 198 \cdot 197 \cdot 196}{200^5}$ die Wahrscheinlichkeit dafür beschreibt, dass sich in einem Päckchen fünf *verschiedene* Tierbilder befinden.
Geben Sie einen Term an, der die Wahrscheinlichkeit dafür beschreibt, dass sich in einem Päckchen fünf *gleiche* Tierbilder befinden.

c) Peter fehlen in seinem Sammelalbum noch 15 Bilder. Er geht mit seiner Mutter zum Einkaufen und erhält anschliessend vier Päckchen mit Tierbildern. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Peter mindestens ein neues Bild für sein Sammelalbum erhält.

Bei Kindern besonders beliebt sind die 3D-Bilder, auf denen die Tiere dreidimensional erscheinen. 25 der 200 für ein Sammelalbum vorgesehenen Bilder sind 3D-Bilder.

d) Die Variable X steht für die Anzahl 3D-Bilder in einem Päckchen. Erstellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X und berechnen Sie den Erwartungswert von X.

e) Ermitteln Sie, wie viele Päckchen ein Kind mindestens benötigt, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99% mindestens ein 3D-Bild zu erhalten.