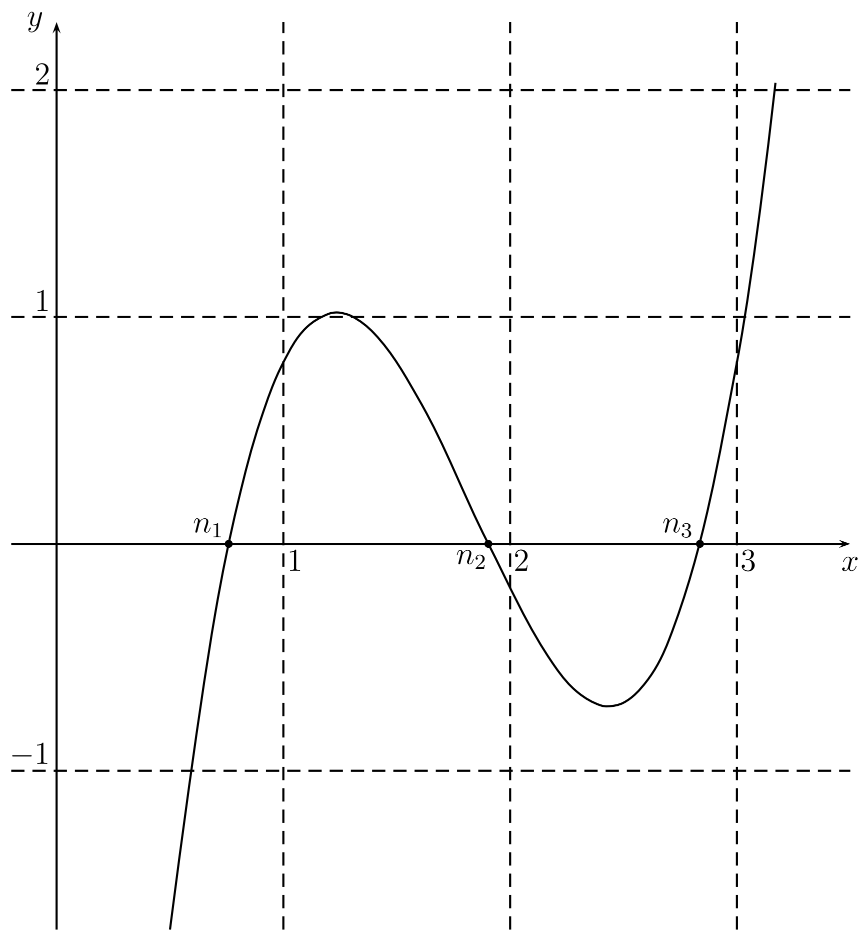
Aufgabe 1: Newtonverfahren	a	b	
	2	5	**7 Punkte**

Um die Lösungen n_1, n_2 und n_3 der Gleichung

$$2x^3 - 11x^2 + 18x - 8.2 = 0 \qquad (\star)$$

zu finden, kann der Graph der Funktion $f(x) = 2x^3 - 11x^2 + 18x - 8.2$ betrachtet und das Newtonverfahren angewendet werden. Der Graph von f ist gezeichnet. Er hat einen Hochpunkt bei $x \approx 1.23$ und einen Tiefpunkt bei $x \approx 2.43$ (muss nicht gezeigt werden). Die Lösungen n_1, n_2 und n_3 der Gleichung $(\star)$ sind die Nullstellen von f.

Das Newtonverfahren ist zwar eine effiziente Methode zur Bestimmung von Nullstellen, doch muss bei der Wahl der Startstelle aufgepasst werden.



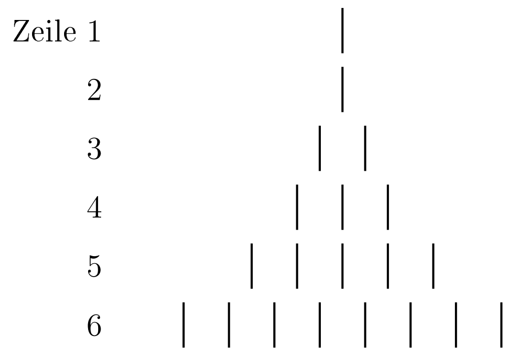
a) Hugo möchte die Lösung n_2 mit dem Newtonverfahren berechnen und wählt als Startwert die Stelle $x_0 = 2.4$. Erläutern Sie mit Hilfe geometrischer Überlegungen und ohne zu rechnen, warum er durch die Wahl dieses Startwerts nicht die Lösung n_2, sondern die Lösung n_1 annähern wird. Sie dürfen in die Graphik hineinzeichnen.

b) Heidi möchte die Lösung n_2 mit dem Newtonverfahren berechnen und wählt als Startwert die Stelle $x_0 = 2.33$. Machen Sie durch eine Rechnung klar, warum auch dies kein geeigneter Startwert für die Approximation von n_2 ist, indem Sie zwei Näherungsschritte des Newtonverfahrens durchführen.

Schriftliche Maturaprüfung 2018
Ergänzungsfach Anwendungen der Mathematik

	a	b	
Aufgabe 2: Spieltheorie	2	5	**7 Punkte**

Die Spielerinnen A und B spielen ein NIM-Spiel. In den sechs Zeilen liegen Hölzchen in einer Anzahl, die den Fibonacci-Zahlen entsprechen:



A beginnt, B zieht nach. Dann ist wieder A an der Reihe usw. Ein Zug besteht darin, aus einer Zeile eine beliebige Anzahl Hölzchen, aber mindestens eines, zu entfernen. Wer das letzte Hölzchen nehmen muss, verliert.

Der bisherige Spielverlauf:

Zug 1: A entfernt 4 Hölzchen aus Zeile 6.
Zug 2: B entfernt 3 Hölzchen aus Zeile 4.
Zug 3: A entfernt 2 Hölzchen aus Zeile 3.
Zug 4: B entfernt 2 Hölzchen aus Zeile 5.
Zug 5: A entfernt 1 Hölzchen aus Zeile 6.
Zug 6: B entfernt 1 Hölzchen aus Zeile 1.
Zug 7: A entfernt 1 Hölzchen aus Zeile 2.
Zug 8: B entfernt 1 Hölzchen aus Zeile 5.

a) Jetzt liegen in Zeile 5 zwei Hölzchen, in Zeile 6 liegen drei Hölzchen. Spielerin A ist am Zug. Sie weiss, dass sie gewinnen wird. Erklären Sie, warum A siegessicher sein kann.

b) Analysieren Sie den Verlauf des Spieles. Werten Sie jeden einzelnen Zug: Ist er gut, oder ist er schlecht? Begründen Sie Ihre Entscheidung und geben Sie bei schlechten Zügen eine bessere Zugvariante an.

	a	b	c	d	
Aufgabe 3: Vektorgeometrie	5	1	1	2	**9 Punkte**

Gegeben sind die Punkte $A(7/5/1)$, $B(2/5/1)$, $C(2/1/4)$ und $S(4.5/6/6.5)$.

a) Die Punkte A, B, C und S bilden eine Pyramide mit Grundfläche ABC und Spitze S. Berechnen Sie das Volumen der Pyramide.

Für jedes $k \in \mathbb{R}$ hat die Ebene E_k die Gleichung $3y + 4z - k = 0$.
G ist die Grundebene, die das Dreieck ABC enthält.

b) Weisen Sie nach, dass die Ebenen E_k und G für alle $k \in \mathbb{R}$ parallel sind.

c) Für welche Werte von k hat E_k mit der Pyramide $ABCS$ mindestens einen gemeinsamen Punkt?

d) Für welches k schneidet die Ebene E_k aus der Pyramide ein Dreieck mit Flächeninhalt 3.125 heraus?

	a	b	
Aufgabe 4: Komplexe Zahlen	3	3	**6 Punkte**

a) Finden Sie alle Lösungen der Gleichung

$$z^3 = (45 + 28i)z$$

in Normalform, ohne auf dem Taschenrechner spezielle Lösungs- oder Wurzelfunktionen zu benutzen.

b) Eine komplexe Gleichung der Form $z^6 = a$, wobei a eine komplexe Zahl ist, soll die Lösung $q = -1 + 3i$ besitzen. q wird zusammen mit den anderen Lösungen dieser Gleichung in die Gauss'sche Zahlenebene eingezeichnet. Es entsteht eine geometrische Figur. Berechnen Sie den Flächeninhalt dieser Figur.

	a	b	c	d	
Aufgabe 5: Populationsmodelle	5	2	1	2	**10 Punkte**

In einem Zoo bricht unter einer Affenart eine Krankheit aus, für welche nur sie anfällig ist. Diese Krankheit ist für die Affen nicht gefährlich, so dass die Tiere nicht voneinander getrennt werden. Als dem Personal die Krankheit auffällt, sind erst 4 der insgesamt 216 Affen infiziert. 5 Wochen später sind bereits 27 erkrankt.

Es sei $P(t)$ die Anzahl erkrankter Affen zur Zeit t (in Wochen).

Der Ausbreitung der Krankheit kann ein logistisches Wachstum unterstellt werden:

$$P'(t) = \lambda \cdot P(t) \cdot (216 - P(t)) \ .$$

a) Die Lösung dieser Differentialgleichung ist

$$P(t) = \frac{216}{1 + c \cdot e^{-216\lambda t}} \quad .$$

Führen Sie mit Hilfe einer Separation der Variablen und einer Partialbruchzerlegung ausführlich vor, wie diese Lösung gewonnen wird.

b) Die Anfangs- und Randbedingungen im vorliegenden Problem berücksichtigend: Wie lautet die Funktion $P(t)$?

c) Zu welchem Zeitpunkt t_l werden gemäss dem logistischen Modell 25% der Affenpopulation von der Krankheit infiziert sein?

Man könnte der Situation jedoch auch ein beschränktes Wachstum unterstellen.

d) Angenommen, es würde mit dem Modell des beschränkten Wachstums eine Prognose t_b für die gleiche Fragestellung wie in Teilaufgabe c) berechnet. Warum ist t_b grösser als t_l? Begründen Sie mit Hilfe von Funktionsgraphen und ohne zu rechnen.

	a	b	c	d	
Aufgabe 6: Statistischer Test	1	4	1	2	**8 Punkte**

Immer wieder möchten Menschen durch Aggravation (übertriebene Darstellung von Beschwerden) in den Genuss von Versicherungsleistungen kommen. Ein 22-Jähriger gibt vor, nach einem Schädel-Hirn-Trauma nicht mehr rechnen zu können. Der Neuropsychologe Thomas Merten entwickelt deshalb einen Aufgabenbogen, mit dem untersucht werden kann, ob der Patient etwas vortäuscht.

Der Aufgabenbogen besteht aus 40 einfachen Rechenaufgaben, beispielsweise 3 plus 3. Zu jeder Aufgabe werden zwei Lösungen angeboten: die richtige, nämlich 6, und eine, die knapp daneben liegt, zum Beispiel 7. Ein Mensch, der nicht rechnen kann, beantwortet eine Rechenaufgabe mit einer Wahrscheinlichkeit von 50% korrekt, indem er rät.

Nun wird der 22-jährige Patient mit der angeblichen Rechenunfähigkeit gebeten, den Aufgabenbogen auszufüllen. Ziel ist der Nachweis, dass der junge Mann sein Handicap vortäuscht. Dies soll mit Hilfe eines statistischen Tests geschehen.

a) Warum ist es sinnvoll, den statistischen Test zweiseitig anzulegen?

b) Formulieren Sie den vollständigen, zweiseitigen statistischen Test. Definieren Sie die Hypothesen, Testgrösse, Testverteilung, den Verwerfungsbereich und die Entscheidungsregel für ein Signifikanzniveau von 1%.

Der junge Mann löst nur 10 der 40 Rechenaufgaben richtig.

c) Welche Folgerung muss Merten ziehen?

Ein anderer Mann hat eine leichte Rechenschwäche; er kann eine Rechenaufgabe mit einer Wahrscheinlichkeit von 80% korrekt lösen.

d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird man ihm nach dem Ausfüllen des Aufgabenbogens unterstellen, nicht rechnen zu können?