Schriftliche Maturaprüfung 2017
Grundlagenfach Mathematik

	a	b	c	d	
Aufgabe 1: Vektorgeometrie	2.5	2.5	2.5	3.5	**11 Punkte**

In der Nähe eines Wintersportortes befindet sich die Gadenmatte, ein ebener Skihang. Der geradlinige Skilift verbindet die Talstation $T(0/0/10)$ mit der Bergstation $B(5/-10/15)$. Am Hang befindet sich im Punkt $G(8/4/12)$ der Gaden, welcher dem Hang den Namen gibt. (1 Einheit entspricht 100 Metern)

a) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Hangebene E, die durch die Punkte T, B und G gegeben ist.

b) Eine Piste verläuft geradlinig von der Bergstation B direkt zum Gaden G. Wie lang ist die Piste? Welche prozentuale Steigung weist die Piste auf?

c) Das Projekt des Skiliftbetreibers, das gesamte Dreieck TBG künstlich zu beschneien, wurde nicht in die Tat umgesetzt. Welches Schneevolumen wäre hierfür erforderlich gewesen, wenn die Schneeschicht 20 cm dick sein sollte?

d) Auf der Gadenmatte ereignet sich ein Unfall an einem Ort, der sich nicht zur Landung eines Helikopters eignet. Im Punkt $H(1/-2/12.25)$ schwebt jetzt der Rettungshelikopter direkt (in z-Richtung) über dem Verunfallten.

   d1) In welchem Punkt befindet sich der Verunfallte?

   d2) Wie viele Meter Abstand zum Hang hat der Helikopter? (das ist nicht der Abstand zum Verunfallten)

	a	b	c	d	
Aufgabe 2: Analysis	2	2.5	3	2.5	**10 Punkte**

Gegeben ist die reellwertige Funktion f mit der Gleichung $f(x) = \frac{8}{x^2}$.

a) Der Graph von f schliesst im 1. Quadranten zusammen mit der x- und der y-Achse eine Fläche ein, die auf zwei Seiten ins Unendliche reicht. Diese Fläche soll angemalt werden. Ist es möglich, mit endlich viel Farbe auszukommen, wenn die Farbe überall gleich dick aufgetragen wird?

b) Von einem Trapez $ABCD$ ist Folgendes bekannt: Der Punkt A ist der Ursprung, B liegt auf der positiven x-Achse, C liegt auf dem Graphen von f, D ist der Punkt $(0/1)$. Die parallelen Trapezseiten sind AD und BC. Wie müssen die Punkte B und C gewählt werden, damit der Flächeninhalt des Trapezes minimal wird?

c) Welcher Punkt auf dem Graphen von f ist dem Ursprung am nächsten? Die Lösung ergibt sich aus einer Gleichung der Form $x^n - a = 0$. Leiten Sie diese Gleichung von Hand her.

Die Graphen der Kurvenschar $p_k(x) = k - \frac{k^2}{32}x^2$, $k > 0$, sind nach unten geöffnete Parabeln.

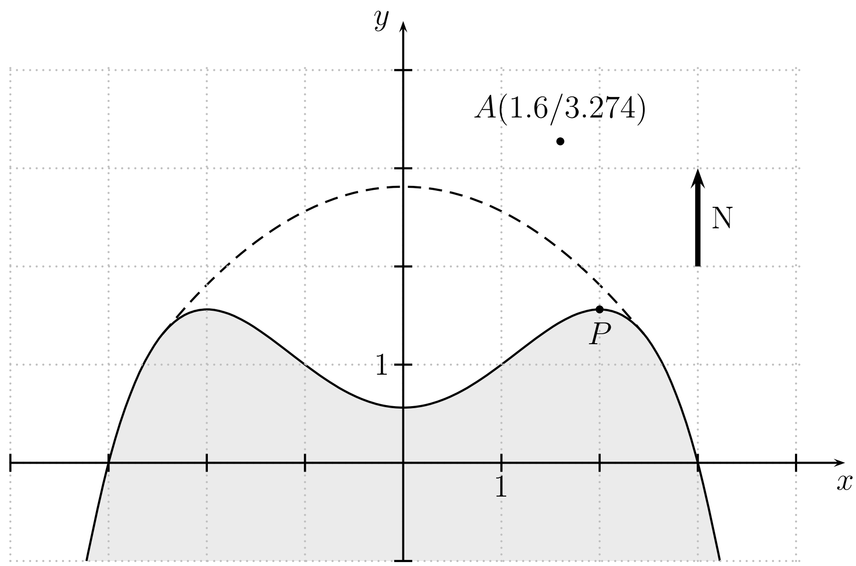
d) Beweisen Sie: Die beiden Graphen von p_k und f berühren sich für jedes $k > 0$ stets in zwei Punkten.

	a	b	c	d	e	
Aufgabe 3: Analysis	2	1	3	2	3	**11 Punkte**

Die nebenstehende Abbildung zeigt eine künstlich aufgeschüttete Nordküste. Eine Längeneinheit entspricht 100 m. Direkt am Strand führt ein Uferweg entlang (durchgezogene Linie). Er ist durch die Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = -\frac{x^4}{16} + \frac{x^2}{2} + \frac{9}{16}$$

gegeben.



a) Weisen Sie nach: Der Punkt $P(2/\frac{25}{16})$ ist in dem betrachteten Küstenabschnitt einer der am weitesten nördlich gelegenen Punkte.

b) In welchen Punkten ändert sich das Kurvenverhalten für einen Radfahrer, der den Uferweg entlang fährt?

Der Küste vorgelagert ist ein Felsen A. Wegen seiner schönen Form wird er gerne vom Ufer aus betrachtet.

c) Ein Wanderer geht auf dem Uferweg von West nach Ost. Sein Startpunkt liegt bei $x = -4$. Er befindet sich in einer Rechtskurve, als er zum ersten Mal den Felsen A direkt vor sich, das heisst exakt in der Gehrichtung, erblickt. In welchem Punkt befindet sich der Wanderer?

In der durch die Küstenlinie gebildeten Bucht soll ein Strandbad gebaut werden. Um es vor gefährlichen Stömungen zu schützen, soll ein Damm d in Form einer quadratischen Parabel mit der Gleichung

$$d(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{45}{16}$$

gebaut werden (gestrichelte Linie). Das Strandbad wird vom Uferweg f und vom Damm d eingegrenzt.

d) Wie viele Quadrateinheiten gross ist die Fläche des so gebildeten Badesees?

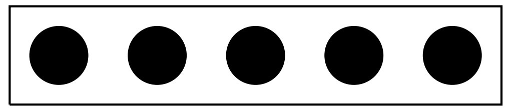
e) Nach dem Bau des Dammes soll eine Kette, die genau in West-Ost-Richtung gelegt und am Damm d befestigt wird, vom Badesee ein seichtes, der Küste vorgelagertes Becken abteilen, das zwei Drittel der gesamten Fläche des Badesees ausmacht. Wie lang wird die Kette werden?

	a	b	c	d	
Aufgabe 4: Wahrscheinlichkeitsrechnung	1.5	1.5	3	3	**9 Punkte**

Im Biathlon wird im Abstand von 50 Metern auf kleine schwarze Scheiben geschossen.

Selina Gasparin, die derzeit beste Schweizer Biathletin, trifft die schwarze Scheibe mit einer Wahrscheinlichkeit von 78% (Wert aus dem Winter 2015/16).

a) Im Training schiesst Gasparin auf 50 Scheiben. Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft sie mindestens 45 der Scheiben?



An Wettkämpfen wird auf die 5er-Tafel geschossen, die aus fünf benachbarten Scheiben besteht (siehe Bild). Es werden immer fünf Schüsse abgegeben, jeder auf eine andere schwarze Scheibe. Trifft die Athletin eine einzelne Scheibe, wird sie durch ein weisses Plättchen verdeckt.

b) An Einzelwettkämpfen wird auf insgesamt vier 5er-Tafeln geschossen. Für jeden Fehlschuss wird eine Strafrunde fällig. Mit wie vielen Strafrunden muss Gasparin pro Wettkampf rechnen?

Damit sich die Fans von Selina Gasparin auch bei Fehlschüssen von ihr freuen können, führt ihr Fanclub während der Wettkämpfe ein Spiel durch. Vor dem Schiessen von Gasparin auf eine 5er-Tafel leistet der Spieler einen Geldeinsatz. Nach dem Schiessen werden die weissen Plättchen auf der 5er-Tafel gezählt (Anzahl Treffer). Das Auszahlungsreglement besagt:

- Für vier oder fünf weisse Plättchen wird nichts ausbezahlt.
- Für drei weisse Plättchen werden 3 Franken ausbezahlt.
- Für zwei weisse Plättchen werden 10 Franken ausbezahlt.
- Für ein weisses Plättchen werden 100 Franken ausbezahlt.
- Für kein weisses Plättchen werden 1000 Franken ausbezahlt.

c) Wie hoch muss der verlangte Geldeinsatz liegen, damit der Club pro Einzelspiel im Durchschnitt einen Gewinn von 23 Rappen erzielt?

Besonders heikel ist das Schiessen bei Wind. Die Gegend von Hudelheide ist bekannt dafür, dass der Wind mit einer Wahrscheinlichkeit von 10% so stark bläst, dass er die Athletin beim Schiessen stört. Dann halbiert sich ihre Trefferquote von 78% auf die Hälfte.

d) Gasparin schiesst in Hudelheide auf eine 5er-Tafel und trifft nur eine der fünf Scheiben. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat sich der Wind störend bemerkbar gemacht?

	a	b	
Aufgabe 5: Kapitalrechnung	2	2	**4 Punkte**

Aus dem 1. Teil der *Vollständigen Anleitung zur Algebra* von *Leonhard Euler* (1707-1783) die 552. und die 553. Aufgabe:

a) Jemand hat ein Kapital von 1000 Reichstaler zu 5% angelegt, wozu er immer am Ende des Jahres ausser den Zinsen noch 100 Reichstaler hinzulegt. Wie gross wird dieses Kapital nach 25 Jahren sein?

b) Da nun das Kapital immer grösser wird, so kann man weiter fragen, nach wie vielen Jahren dasselbe bis 1 000 000 Reichstaler anwachsen werde.