KANTON
LUZERN
Bildungs- und Kulturdepartement

Kantonsschule Alpenquai Luzern

Schriftliche Maturitätsprüfung 2017

Fach	Grundlagenfach Mathematik
Prüfende Lehrpersonen	Alitiloh Essodinam essodinam.alitiloh@edulu.ch Mitkova Teodora teodora.mitkova@edulu.ch Zuidema Roel roel.zuidema@edulu.ch
Klassen	6a, 6e, 6i, 6l
Prüfungsdatum	Freitag, 19. Mai 2017
Prüfungsdauer	180 Minuten
Erlaubte Hilfsmittel	- Formelsammlung „Formeln, Tabellen, Begriffe“ - Taschenrechner: TI-Voyage200 (ohne Handbuch), zusätzlich ein Rechner vom Typ TI-30
Anweisungen zur Lösung der Prüfung	- Es wird Wert auf eine saubere Darstellung gelegt. - Jede Aufgabe soll einen vollständigen und nachvollziehbaren Lösungsweg enthalten. - Jede Aufgabe soll auf einem neuen Bogen begonnen werden. - Jeder Bogen ist mit dem Namen zu beschriften.
Anzahl erreichbarer Punkte	Aufgabe 1: 12 Aufgabe 2: 12 Aufgabe 3: 8 Aufgabe 4: 10 Total: 42 Für die Note 6 werden mindestens 39 Punkte benötigt.
Anzahl Seiten (inkl. Titelblatt)	5

……………………………………………………… Name, Vorname

……………… Klasse

……………… Nummer

	a	b	c	d	e	Punkte
Aufgabe 1 [Vektorgeometrie]	3	2	2	2	3	**12**

Gegeben sind die Gerade h durch die Punkte $A(5\,|-5\,|\,1)$ und $B(1\,|-5\,|-1)$ sowie die Gerade g mit der Parametergleichung $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$.

a) Die beiden Geraden g und h schneiden sich im Punkt S. Bestimmen Sie die Koordinaten von S und den Schnittwinkel.

b) Die Geraden g und h spannen eine Ebene E auf. Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E, in der nur ganzzahlige Koeffizienten auftreten.

c) Zeigen Sie, dass der Punkt $L(3\,|-1\,|-4)$ auf g den kleinsten Abstand vom Punkt $C(2\,|\,1\,|-2)$ hat. Berechnen Sie die Länge der Strecke CL.

d) Bestimmen Sie eine Parametergleichung der Ebene F durch C und $G(1\,|-3\,|-3)$, die senkrecht auf E steht.

e) Das Volumen der Pyramide $GLCH$ beträgt 36. Zeigen Sie, dass ihre Grundfläche GLC ein rechtwinkliges Dreieck ist. Bestimmen Sie die Höhe der Pyramide $GLCH$.

	a	b	c	d	e	f	Punkte
Aufgabe 2 [Analysis]	2	1.5	2.5	2	2	2	**12**

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\dfrac{(2x-8)^2}{x^2+2x-15}$.

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich sowie die Gleichungen aller Asymptoten der Funktion f .

b) Zeigen Sie algebraisch, dass die erste Ableitung der Funktion f

$$f'(x)=\frac{8(x-4)(5x-11)}{(x^2+2x-15)^2}$$

lautet.

c) Bestimmen Sie das Monotonieverhalten und die Extrempunkte der Funktion f .

d) Zeichnen Sie mithilfe der Erkenntnisse aus den Teilaufgaben a) und c), den Graphen von f (1 Einheit = 2 Häuschen).

e) Bestimmen Sie die Gleichung der Normalen des Graphen von f an der Stelle $x=7$.

f) Betrachten wir nun die allgemeine Funktion f_k mit $f_k(x)=\dfrac{(k\cdot x-8)^2}{x^2+2x-15}$, $k\in\mathbb{R}$. Für welche Werte von k hat die Funktion f_k an der Stelle $x=-4$ die Steigung 42?

	a	b	c	d	Punkte
Aufgabe 3 [Analysis]	1.5	3	1.5	2	**8**

Gegeben ist die Funktionenschar $f_t(x) = e^{-xt}$ mit $t > 0$.

Im Bild 1 sind für verschiedenen t-Werte die Graphen dieser Schar gezeichnet. Alle Graphen dieser Schar gehen durch den Punkt P.

$A(t)$ sei der Flächeninhalt der Fläche, die von der positiven x-Achse, der y-Achse und dem Graphen von f_t begrenzt wird (Bild 2).

a) Bestimmen Sie den Punkt P und beschreiben Sie in Worten, wie der Parameterwert t den Verlauf des Graphen von f_t und den Flächeninhalt $A(t)$ beeinflusst.

b) Bestimmen Sie algebraisch einen Ausdruck für den Flächeninhalt $A(t)$.

c) $B(t)$ sei der Flächeninhalt der Fläche, die von der x-Achse, der y-Achse und dem Graphen von f_t und der Geraden $x = t$ begrenzt wird (Bild 3). Zeigen Sie, dass

$B(t) = \frac{1}{t}\left(1 - e^{-t^2}\right)$ gilt.

d) Bestimmen Sie die Parameterwerte von t, für die der Flächeninhalt $B(t)$ einen Extremwert erreicht. Berechnen Sie die entsprechenden Extremwerte.

Bild 1

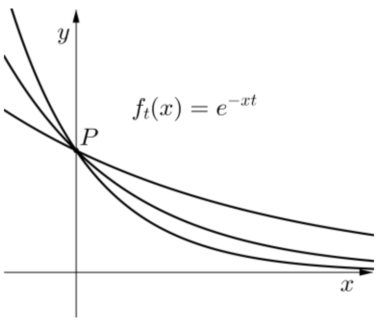


Bild 2

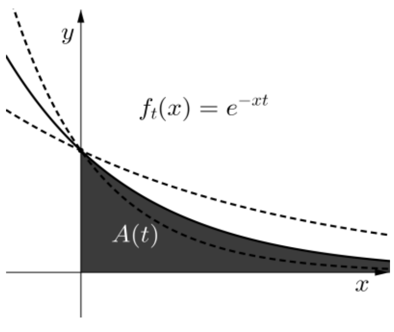
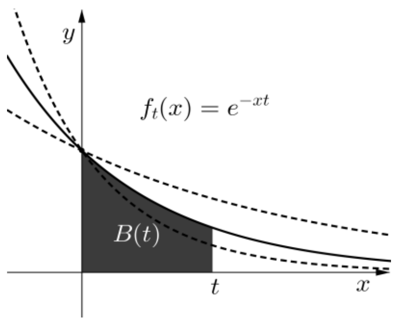


Bild 3



	a	b	c	d	e	Punkte
Aufgabe 4 [Stochastik]	1	2	3	2	2	**10**

Die sehr vielen eingehenden Leserbriefe der Zeitschrift *Freizeit & Hobby* beschäftigen sich erfahrungsgemäss zu 55% mit dem Thema *Reisen*, zu 20% mit dem Thema *Sport*, zu 10% mit dem Thema *Musik* und zu 15% mit *sonstigen Themen*. Es wird angenommen, dass sich jeder der eingegangenen Briefe eindeutig einem der vier Themen zuordnen lässt.
Wir fassen im Folgenden die relativen Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten auf und gehen davon aus, dass das Thema jedes Briefes unabhängig von den anderen ist.

Die eingegangenen Briefe werden thematisch sortiert und auf vier in einer Reihe liegende Stapel gelegt.

a) Wie viele verschiedene Anordnungen der vier Stapel sind möglich?

b) Wie viele unterschiedliche Anordnungen sind möglich, wenn der Stapel *Reisen* nicht neben dem Stapel *Musik* liegen darf?

Die Zeitschrift lost unter den sehr vielen Einsenderinnen und Einsendern der Briefe in einem bestimmten Zeitraum fünf Preise aus.

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse.
E_1: „Alle fünf Preise gehen an Einsenderinnen und Einsendern aus dem Bereich *Reisen*“.
E_2: „Mindestens ein Preis geht an eine Einsenderin oder einen Einsender aus dem Bereich *Musik*“.
E_3: „Mindestens zwei aber höchstens vier Preise gehen an Einsenderinnen und Einsendern aus dem Bereich *Sport*“.

Der Zeitschriftenredakteur entnimmt der noch zu sortierenden Post sechzig Briefe.

d) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Zeitschriftenredakteur mindestens drei aber höchstens sechs Briefe zum Thema *Musik* herauszieht?

e) Wie viele Briefe müsste der Zeitschriftenredakteur der eingegangenen Post entnehmen, damit er mit einer Wahrscheinlichkeit höher als 95% mindestens eine Zuschrift zum Thema *Musik* erhält?