Schriftliche Maturaprüfung 2017
Ergänzungsfach Anwendungen der Mathematik

	a	b	c	d	e	
Aufgabe 1: Wurzelterme	1.5	2	3	1	2.5	**10 Punkte**

Für die kubische Gleichung

$$x^3 + px = q$$

kann mit der Cardanischen Formel

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

eine Lösung berechnet werden.

Wir betrachten im Folgenden die spezielle Gleichung

$$x^3 + 5x = 42 \qquad (\star)$$

Sie hat die Lösung $x = 3$.

a) Zeigen Sie, dass die Anwendung der Cardanischen Lösungsformel auf die Gleichung $(\star)$ zum Ausdruck

$$x = \sqrt[3]{21 + \frac{16}{9}\sqrt{141}} + \sqrt[3]{21 - \frac{16}{9}\sqrt{141}} \qquad (\star\star)$$

führt.

Dieser Ausdruck müsste eigentlich für den Wert 3 stehen. Schon im 16. Jahrhundert wussten die damaligen Rechenmeister, wie solche Terme mit Kubikwurzeln in einfachere Formen überführt werden können (ohne Taschenrechner natürlich).

Erfolgversprechend ist, vom Ansatz $\sqrt[3]{21 + \frac{16}{9}\sqrt{141}} = a + b\sqrt{c}$ auszugehen. Gesucht sind die Werte für a, b und c.

b) Erklären Sie, warum es hier sinnvoll ist, $a = \frac{3}{2}$ und $c = 141$ zu wählen.

c) Berechnen Sie jetzt den Wert für b und weisen Sie nach, dass der damit gefundene Ausdruck in der Tat die gesuchte Kubikwurzel ist. Den Taschenrechner dürfen Sie nur für das Zusammenfassen und Vereinfachen von Termen verwenden.

d) Weisen Sie unter Verwendung der Resultate aus b) und c) ohne Taschenrechner nach, dass der Ausdruck $(\star\star)$ den Wert 3 hat.

e) Um Näherungen für Quadrat- oder Kubikwurzeln zu finden, kann das Heronverfahren oder eine seiner Varianten eingesetzt werden. Ermitteln Sie mit dem Heronverfahren eine Näherung für die Quadratwurzel $\sqrt{141}$ auf fünf Stellen genau. Den Taschenrechner dürfen Sie für die Elementaroperationen $+$, $-$, $\cdot$ und $:$ einsetzen. Machen Sie verständlich, warum die von Ihnen ermittelte Näherung die geforderte Genauigkeit einhält.

	a	b	c	d	
Aufgabe 2: Vektorgeometrie	3	2.5	2	1.5	**9 Punkte**

In einem kartesischen Koordinatensystem ist eine Pyramide $ABCDS$ mit der Grundfläche durch die Eckpunkte $A(22/2/14)$, $B(12/22/-6)$, $C(-8/2/-16)$, $D(2/-18/4)$ und der Spitze $S(-5/8/11)$ gegeben. Von der Gerade g durch den Punkt D ist zudem der Punkt $P(23/66/11)$ gegeben.

a) Zeigen Sie, dass $ABCDS$ eine gerade quadratische Pyramide ist (Spitze exakt über dem Mittelpunkt der Grundfläche).

b) Berechnen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E, die durch die drei Punkte A, B und S definiert wird.

c) Berechnen Sie die Höhe der Pyramide und den Inhalt der dreieckigen Seitenfläche ABS.

d) Berechnen Sie den Winkel, unter dem die Gerade g die Ebene E durchstösst.

	a	b	c	
Aufgabe 3: Differentialgleichungen	1.5	1	4.5	**7 Punkte**

Gegeben ist die Differentialgleichung (DGL)

$$y'(x) = 245 - 0.35y(x) \qquad \text{(DGL 1)}$$

Diese DGL beschreibt beschränktes Wachstum.

a) Bestimmen Sie die Lösung von (DGL 1) für die Anfangsbedingung $y(0) = 50$.

b) Für welches x erreicht der Funktionswert $y(x)$ die halbe Sättigungsgrenze?

Die Gleichung

$$y'(x) = 245\sin(2x) - 0.35y(x) \qquad \text{(DGL 2)}$$

ist eine lineare DGL 1. Ordnung, beschreibt jedoch kein beschränktes Wachstum mehr.

c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von (DGL 2).

Schriftliche Maturaprüfung 2017
Ergänzungsfach Anwendungen der Mathematik

	a	b	c	d	
Aufgabe 4: Spieltheorie	2.5	1.5	2	2	**8 Punkte**

Die *Battle of the Networks* ist ein berühmtes Szenario der Spieltheorie.

In einem Land kämpfen genau zwei Fernsehkanäle, Kanal 1 und Kanal 2, um die Marktanteile (0-100%) im Zeitfenster 14-17 Uhr. Höhere Marktanteile sind bevorzugt, da sie mit höheren Werbeeinnahmen verbunden sind.

Derzeit erwägen beide Kanäle das Ausstrahlen von Sitcoms, Sport oder News. Eine Marktuntersuchung ergibt folgende Matrix:

		Kanal 2		
		Sitcom	Sport	News
	Sitcom	52	45	48
Kanal 1	Sport	55	52	54
	News	46	42	55

Notiert ist der Marktanteil für Kanal 1. Der Marktanteil von Kanal 2 ergibt sich aus der Tatsache, dass beide Marktanteile zusammen 100% betragen.

a) Beide Kanäle verfolgen eine Maximin-Strategie. Welche Sendungskonstellation ergibt sich? Weisen Sie nach, dass diese Konstellation ein Nash-Gleichgewicht ist.

b) Begründen Sie, warum es nicht möglich ist, durch Ändern **eines** einzelnen Wertes in der ersten Matrixzeile (Kanal 1, Sitcom) die Anzahl der Nash-Gleichgewichte des Spiels zu erhöhen.

Beide Kanäle prüfen das Ausstrahlen neu konzipierter Quizshows.

		Kanal 2			
		Sitcom	Sport	News	Quizshow
	Sitcom	52	45	48	43
Kanal 1	Sport	55	52	54	45
	News	46	42	55	44
	Quizshow	58	52	53	42

c) Welches Gleichgewicht ergibt sich, wenn beide Kanäle die Methode der wiederholten Elimination dominierter Strategien anwenden?

Kanal 1 kann einen beliebten Fernsehkoch für eine Kochsendung gewinnen und überlegt sich nun deren Einbau ins Programm.

		Kanal 2			
		Sitcom	Sport	News	Quizshow
	Sitcom	52	45	48	43
	Sport	55	52	54	45
Kanal 1	News	46	42	55	44
	Quizshow	58	52	53	42
	Kochshow	52	62	65	41

d) Lohnt es sich für Kanal 1, auf die Kochsendung zu setzen, wenn erneut die Methode der wiederholten Elimination strikt dominierter Strategien angewendet wird?

	a	b	c	d	e	
Aufgabe 5: Logik & komplexe Zahlen	2	2	1.5	2	1.5	**9 Punkte**

A	B	$\overline{A} \vee B$	$A \wedge \overline{B}$	T_1	T_2
1	1			0	1
1	0			0	0
0	1			1	0
0	0			0	1

a) Füllen Sie die Wahrheitstafel für die beiden Verknüpfungen $\overline{A} \vee B$ und $A \wedge \overline{B}$ aus.

b) Finden Sie anstelle der Terme T_1 und T_2 Verknüpfungen von A und B, so dass die gegebenen Wahrheitswerte resultieren. Als logische Verknüpfungen zugelassen sind $\vee$, $\wedge$ und die Negation $\overline{A}$.

Bestimmen Sie die Wahrheitswerte der folgenden Aussagen und begründen Sie Ihre Entscheidung ausführlich und nachvollziehbar.

c) i^{-7i} ist reell.

d) Die Zahl $(-1 + 2017i)^{2017}$ liegt im 2. Quadranten der Gauss'schen Zahlenebene.

e) Die Lösungen der Gleichung $z^3 = i$ spannen ein gleichseitiges Dreieck auf.

	a	b	
Aufgabe 6: Statistischer Test	4	1	**5 Punkte**

Bei der Untersuchung der Frage, ob Knabengeburten und Mädchengeburten gleich häufig sind, kann man nach *John Arbuthnot* (1667-1735) folgendermassen vorgehen: Man vergleicht über einen längeren Zeitraum hinweg die jährliche Anzahl der Knabengeburten mit derjenigen der Mädchengeburten. Wäre die Wahrscheinlichkeit für die Geburt eines Knaben genauso gross wie die für die Geburt eines Mädchens, so müsste es auf lange Sicht gleich viele Jahre mit mehr Knaben wie Jahre mit mehr Mädchen geben.

a) Formulieren Sie die Hypothesen und den geeigneten statistischen Test. Geben Sie den Verwerfungsbereich für einen Test der Nullhypothese auf dem 1‰-Niveau an, wenn man über 82 Jahre hinweg die Geburten der Knaben mit denjenigen der Mädchen vergleicht.

b) Welche Schlussfolgerung musste John Arbuthnot aus der Feststellung ziehen, dass in den 82 Jahren von 1629 bis 1710 in London stets mehr Knaben als Mädchen zur Welt kamen?