Kantonsschule Alpenquai Luzern

Schriftliche Maturitätsprüfung 2016

Fach	*Mathematik Grundlagenfach*
Prüfende Lehrpersonen	*Franz Meier* *franz.meier10@edulu.ch* *Christoph Arnold* *christoph.arnold@edulu.ch*
Klassen	*6d / 6m*
Prüfungsdatum	*20. Mai 2016*
Prüfungsdauer	*180 Minuten*
Erlaubte Hilfsmittel	*„Formeln, Tabellen, Begriffe“, DMK, DPK, DCK (2009)* *Taschenrechner TI-30, Voyage 200 (oder TI-92 Plus)* *ohne Handbuch*
Anweisungen zur Lösung der Prüfung	*Es wird Wert auf eine saubere Darstellung gelegt.* *Jede Aufgabe soll auf einem neuen Bogen begonnen werden und muss einen vollständigen und nachvollziehbaren Lösungsweg enthalten.* *Beschriften Sie jeden Bogen mit Ihrem Namen und der Ihnen zugeteilten Nummer!*
Anzahl erreichbarer Punkte	*Aufgabe 1: 11.0* *Aufgabe 2: 12.5* *Aufgabe 3: 9.0* *Aufgabe 4: 12.5* *Total: 45.0* *Die Note 6 wird für 40 Punkte erteilt.*
Anzahl Seiten (inkl. Titelblatt)	*5*

………………………………………………………… ……………… ………………
Name, Vorname Klasse Nummer

Aufgabe 1: Vektorgeometrie	a	b	c	d	e_1	e_2	**Punkte**
	1.5	1.5	2	2	2	2	11

Gegeben sind die Punkte A(–1/–4/–1), B(3/–2/3), C(1/–6/7) und S(–6/1/6).
Das Viereck ABCD ist die Grundfläche einer Pyramide mit der Spitze S.

a) Zeige, dass die Punkte A, B und C Eckpunkte eines Quadrates ABCD sind, und bestimme die Koordinaten von D.

b) Bestimme die Koordinatengleichung der Ebene E, in welcher das Quadrat ABCD liegt.

c) Zeige, dass die Pyramide eine *gerade* quadratische Pyramide ist, und berechne das Volumen der Pyramide.

d) Bestimme die Koordinaten des Punktes P, der von den fünf Ecken A, B, C, D, S der Pyramide den gleichen Abstand hat.

Ein Lichtstrahl mit Richtungsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 11 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$ geht von der Spitze S aus und wird an der Ebene E (Ebene der Grundfläche) reflektiert.

e_1) In welchem Punkt und unter welchem Neigungswinkel trifft der Lichtstrahl die Ebene E?

e_2) Bestimme eine Gleichung des reflektierten Lichtstrahls.

Aufgabe 2: Analysis	a	b	c	d	e	**Punkte**
	4	1	3	2.5	2	12.5

Gegeben ist die Kurve k_a mit der Gleichung $f_a(x) = \sqrt{x}\left(a - \dfrac{x}{3a}\right)$, $a > 0$ und $x \geq 0$.

a) Bestimme die Nullstellen und Extremalpunkte der Kurve, sowie die Neigungswinkel der Tangenten in den Nullstellen (auch am Rand des Definitionsbereichs).
Skizziere die Kurve für $a = 1$ im Koordinatensystem, Einheit 3 Häuschen.

b) Auf welcher Kurve bewegt sich der Hochpunkt von k_a, wenn a variiert?

c) Der endlichen Fläche, die von der Kurve k_a und der x-Achse umschlossen wird, soll ein rechtwinkliges Dreieck einbeschrieben werden mit einer Ecke im Schnittpunkt von k_a mit der positiven x-Achse und einer Kathete auf der x-Achse, so dass der Flächeninhalt des Dreiecks maximal wird.
Bestimme die Eckpunkte des Dreiecks.

Es sei t_a die Tangente an die Kurve k_a im Schnittpunkt von k_a mit der positiven x-Achse.

d) Die Kurve k_a, die Tangente t_a und die y-Achse umschliessen eine Fläche, die bei Rotation um die x-Achse einen kegelförmigen Hohlkörper erzeugt.
Bestimme das Volumen des Hohlkörpers in Abhängigkeit von a.

e) Beweise, dass der Abschnitt auf t_a zwischen den Koordinatenachsen die gleiche Länge hat wie das Bogenstück der Kurve k_a zwischen den Nullstellen.
Hinweis: Beachte $x \geq 0$

Aufgabe 3: Analysis	a	b	c	d	e	**Punkte**
	2.5	2	1	1.5	2	9

Die Molkerei Luegisland hat ein Rezept für ein Joghurt mit der neuen Geschmacksrichtung „Apfelbeere“ entwickelt. Für die Produktion dieses Joghurts geht die Molkerei von einem S-förmigen Kurvenverlauf der Kostenfunktion $k(x)$ aus, welche der Produktionsmenge x (in Mengeneinheiten ME) die Gesamtkosten y (in Geldeinheiten GE) zuordnet.
Die Fixkosten, also die Kosten, die bestehen bei einer Produktionsmenge null, betragen 400 GE. Weiter ist bekannt, dass der Graph der Kostenfunktion $k(x)$ einen Wendepunkt in $(10/700)$ aufweist und die Wendetangente t die Gleichung $y = 20x + 500$ hat. Die Kapazitätsgrenze für den Absatz dieses Produkts liegt bei 50 ME. Man kann weiter davon ausgehen, dass jeweils alles, was produziert wird, auch verkauft wird.

a) Bestimme die Gleichung einer ganzrationalen Funktion mit möglichst kleinem Grad, welche die Entwicklung der Kosten k nach den oben gemachten Angaben beschreibt.

Wer in a) kein Resultat erhalten hat, rechne mit $k(x) = 0.1x^3 - 2.75x^2 + 40x + 500$ weiter.

b) Die Molkerei rechnet mit einem Erlös von 70 GE je ME.
Bestimme die Gleichung der Erlösfunktion $e(x)$ und der Gewinnfunktion $g(x)$ bei den gegebenen Kosten $k(x)$.
Skizziere die Graphen der Kostenfunktion $k(x)$ und der Erlösfunktion $e(x)$ (y-Achse GE mit 500 GE = 1cm und x-Achse 5 ME = 1cm, Definitionsbereich der Funktionen k und e ist $[0, 50]$).

c) Bestimme für die Produktionsmenge x das Intervall, in welchem sich ein Gewinn ergibt, also $e(x) > k(x)$ ist.

d) Bestimme die Produktionsmenge x, für die sich der maximale Gewinn ergibt, und berechne diesen.

e) Zeitgleich ist eine zweite Molkerei mit diesem neuen Produkt und einem Dumpingpreis auf den Markt gekommen. Nun überlegt man bei der Molkerei Luegisland, wie weit bei gleichbleibenden Kosten der Preis (Erlös) gesenkt werden kann. Ein Abteilungsleiter behauptet richtig, dass ein Preis (Erlös) von 50 GE der tiefst mögliche Preis ist, so dass bei einer gewissen Produktionsmenge noch verlustfrei produziert werden kann.
Begründe, dass die Behauptung des Abteilungsleiters richtig ist, und bestimme die entsprechende Produktionsmenge x.

Aufgabe 4: Stochastik	a	b	c	d	e	f_1	f_2	f_3	**Punkte**
	3	1	2	1.5	2	1	1	1	12.5

Eine sechste Klasse will bei einem Schulfest mit einem Glücksspiel Geld einnehmen. Es wird ein Behälter aufgestellt, der 2 schwarze, 3 weisse und 5 rote Kugeln enthält. Ein Spieler zahlt einen bestimmten Einsatz und darf dann zweimal ohne Zurücklegen ziehen.

Die folgenden Varianten werden diskutiert:
Ein Spieler erhält einen Gewinn, wenn
A: beide Kugeln schwarz sind,
B: eine Kugel weiss und eine Kugel schwarz ist,
C: keine Kugel rot ist.

a) Berechne die Wahrscheinlichkeiten P(A), P(B) und P(C).

b) Die Klasse beschliesst, dass es in jedem der drei Fälle A, B und C einen Gewinn geben soll und malt ein Werbeplakat, auf dem steht, dass die Gewinnwahrscheinlichkeit mehr als 35% beträgt. Stimmt das? Begründe die Antwort.

c) Nach dem Einspruch der Schulleitung wird das Plakat wieder abgehängt und Fall C gestrichen. Der Einsatz wird auf CHF 3.00 festgelegt und die Auszahlungen für die Fälle A und B sollen im Verhältnis 3 : 1 stehen. Wie hoch müssen die Auszahlungen sein, damit die Klasse nach 100 Spielen mit einem Gewinn von CHF 20.00 rechnen kann?

Für die folgenden Teilaufgaben werden nur noch Gewinne für die Variante B betrachtet.

d) Carmen will auf Nummer sicher gehen und sich von vornherein so viele Spiele kaufen, dass sie mit 95% Wahrscheinlichkeit mindestens einmal einen Gewinn für das Ereignis B erhält. Wie viele Spiele muss sie kaufen?

e) Ricardo kauft 10 Spiele.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt er genau dreimal für das Ereignis B?
Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt er mindestens zweimal für das Ereignis B?

f) Felipe lässt es darauf ankommen und spielt einfach so lange, bis Ereignis B eintritt.

- f_1) Mit welcher Wahrscheinlichkeit spielt er genau viermal, so dass er also genau im vierten Spiel zum ersten Mal gewinnt?
- f_2) Mit welcher Wahrscheinlichkeit muss er höchstens 21 Mal spielen?
- f_3) Mit wie vielen Spielen muss Felipe rechnen (Erwartungswert)?