KANTON LUZERN
Bildungs- und Kulturdepartement

Schriftliche Maturitätsprüfung 2016

Kantonsschule Alpenquai Luzern

Fach	*Mathematik Grundlagenfach*
Prüfende Lehrpersonen	*Essodinam Alitiloh (essodinam.alitiloh@edulu.ch)* *Simon Wehrle (simon.wehrle@edulu.ch)*
Klassen	*6f / 6h*
Prüfungsdatum	*Freitag, 20. Mai 2016*
Prüfungsdauer	*180 Minuten*
Erlaubte Hilfsmittel	*„Formeln, Tabellen, Begriffe", DMK, DPK, DCK (2009)* *Taschenrechner TI-30, Voyage 200 (oder TI-92 Plus)* *ohne Handbuch*
Anweisungen	*Es wird Wert auf eine saubere Darstellung gelegt.* *Jede Aufgabe soll auf einem neuen Bogen begonnen werden und muss einen vollständigen und nachvollziehbaren Lösungsweg enthalten.* *Beschriften Sie jeden Bogen mit Ihrem Namen und der Ihnen zugeteilten Nummer!*
Anzahl erreichbarer Punkte	*Aufgabe 1: 13* *Aufgabe 2: 11.5* *Aufgabe 3: 9* *Aufgabe 4: 12.5* ***Total: 46*** *Die Note 6 wird für 41 Punkte erteilt.*
Anzahl Seiten (inkl. Titelblatt)	*5*

Aufgabe 1 Vektorgeometrie	a	b	c_1	c_2	d	e	**Punkte**
	3	2	2.5	1	2.5	2	13

Gegeben sind die Gerade g: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und die Ebene E mit der Koordinatengleichung

E: $2x + 3y + 7z = -37$.

a. Die Gerade g und die Ebene E schneiden sich im Punkt S. Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts S und den Schnittwinkel zwischen der Geraden g und der Ebene E.

b. Berechnen Sie den Abstand des Punkts P(-3/-4/-1) von der Ebene E.

c. Der Punkt R(3/4/1) wird an der Ebene E gespiegelt.

c_1. Berechnen Sie die Koordinaten des Spiegelpunkts R‘.

c_2. Stellen Sie die Gleichung der Geraden g‘ auf, die durch die Spiegelung von g an E entsteht.

d. Berechnen Sie den Abstand des Punkts O(0/0/0) von der Geraden g.

e. Eine weitere Ebene ist gegeben durch F: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ -2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ -2 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie k, sodass die Ebenen E und F sich nicht schneiden.

Aufgabe 2	a	b	c	d	**Punkte**
Analysis	3.5	2.5	2	3.5	11.5

Eine Parabel p 4.Ordnung hat genau zwei Nullstellen, bei x = 0 und bei x = 2. Sie nimmt ihr Maximum bei x = $\frac{3}{2}$ an und besitzt den Wendepunkt W(1/?). Die von der Parabel p und der x-Achse eingeschlossene Fläche beträgt $\frac{8}{5}$.

a. Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel p.

Lösen Sie die folgenden Aufgaben mit der Parabel p mit der Gleichung $p(x) = -x^4 + 2x^3$.

b. Die nicht-horizontale Wendetangente der Parabel p schliesst zusammen mit der Parabel p und der x-Achse zwei Flächen ein. Bestimmen Sie den Inhalt der kleineren Fläche.

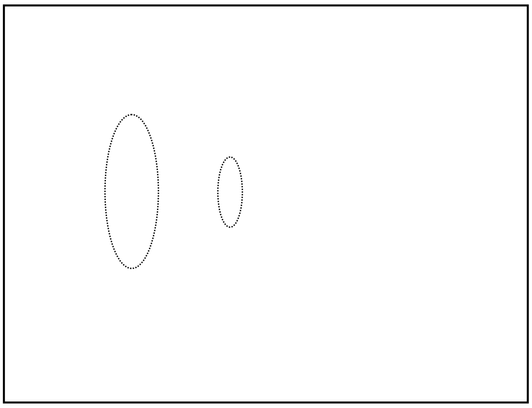
c. Wir betrachten nun die Funktion $f(x) = \frac{p(x)}{ax^k + b}$, wobei p(x) die obige Parabel ist.

Bestimmen Sie die Werte von a, b und k so, dass die Gerade $y = \frac{1}{2}x - 1$ die schiefe Asymptote und die Gerade x = 1 eine vertikale Asymptote des Graphen der Funktion f ist.

d. Wir betrachten nun die allgemeinere Parabel $p_c(x) = -x^4 + 2x^3 - 2cx + c$. Jeder Graph der Parabel p_c hat zwei Wendepunkte. Für welchen Wert von c haben sie den kleinsten Abstand?

Aufgabe 3	a	b	c	d	e	f	**Punkte**
Analysis	1.5	1	1	1.5	1.5	2.5	9

Gegeben ist die Kurve mit der Gleichung $y = \sqrt{x} \cdot e^{-x^2}$ ($x \geq 0$). Durch Rotation der Kurve um die x-Achse entsteht ein Flaschenkörper, der unten gebaucht ist und sich gegen oben verengt (*siehe Grafik rechts*). Die Einheiten im Koordinatensystem seien Dezimeter (dm).



a. Wie gross ist der grösste Durchmesser des Flaschenkörpers?

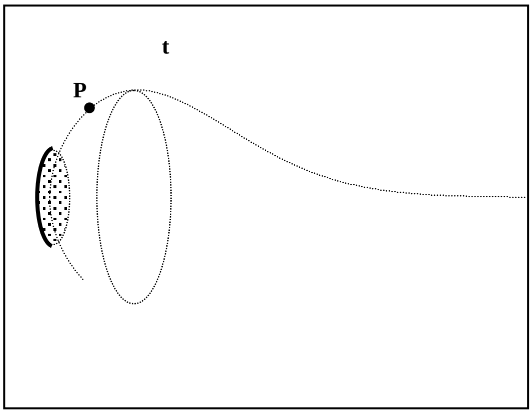
b. Die Flasche wird mit einer Etikette beschriftet. Der obere Rand der Etikette kommt auf die Höhe x zu liegen, wo die Krümmung der Kurve y gleich null ist. Auf welcher Höhe x der Flasche ist dies?

c. Welches Füllvolumen besitzt die ins Unendliche reichende Flasche?

d. Rechts des Wendepunktes der ursprünglichen Kurve wird die Flasche am oberen Ende abgeschnitten, damit ein Korkzapfen eingesteckt werden kann. Um den Korkzapfen korrekt einstecken und fixieren zu können, muss der Betrag des Steigungswinkels der Kurve y kleiner als 5° sein. Ab welcher Höhe x ist dies der Fall?

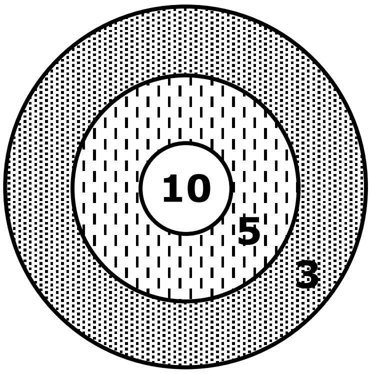
e. Mit welchem Faktor k, $k > 0$, muss der Graph von y gestreckt werden, d.h. wir betrachten die Kurve $y_k = k \cdot \sqrt{x} \cdot e^{-x^2}$, damit die Flasche bis zur Höhe $x = 1.5$ das Füllvolumen von einem Liter hat?

f. Damit die Flasche eine kreisförmige Bodenfläche und somit einen sicheren Stand hat, wird im Punkt P die Tangente t an die Kurve y gelegt. Für $x \geq 0$ wird nun der Rotationskörper wie folgt gebildet: links von P durch die Tangente t und rechts von P durch die Kurve y (*siehe Grafik rechts*).
Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes P so, dass die kreisförmige Bodenfläche einen Radius von $r = 0.25$ (dm) besitzt.



Aufgabe 4 **Wahrscheinlichkeitsrechnung**	a_1	a_2	a_3	a_4	b	**Punkte**
	0.5	0.5	1	1	1.5	
	c_1	c_2	d	e		12.5
	2.5	1.5	2	2		

Auf einer runden Zielscheibe sind zwei konzentrische Kreise eingezeichnet, welche die drei Bereiche für die „10“, die „5“ und die „3“ bestimmen. Wird ein Pfeil auf die Scheibe geworfen, hat er die vier Möglichkeiten, dass er auf eine der drei Zahlen trifft oder daneben fliegt.



a. Sechs Personen werfen je einen verschiedenfarbigen Pfeil auf die Scheibe. Wie viele verschiedene Wurfergebnisse gibt es, wenn

a_1. es keine Einschränkungen gibt?

a_2. nur die erste und die vierte Person die „5“ trifft?

a_3. hintereinander nie dasselbe Wurfergebnis erreicht wird?

a_4. die „10“ mindestens fünfmal getroffen wird?

Die Zielscheibe hat einen Radius von 30cm, die beiden inneren Kreise einen Radius von 18cm bzw. 6cm. Paul trifft die Zielscheibe mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{3}{4}$, und wenn er die Scheibe trifft, jeden Punkt auf der Scheibe mit der gleichen Wahrscheinlichkeit.

Daraus ergeben sich die Wahrscheinlichkeiten:
P[Paul trifft die Zielscheibe nicht] = $\frac{1}{4}$, P[Paul trifft die „3“] = $\frac{12}{25}$, P[Paul trifft die „10“] = $\frac{3}{100}$

b. Beweisen Sie mithilfe von Geometriekenntnissen, dass P[Paul trifft die „5“] = $\frac{6}{25}$.

***Bemerkung*:** Ein Beweis aufgrund der Tatsache, dass sich die Wahrscheinlichkeiten aller Ergebnisse zu eins summieren, wird nicht akzeptiert!

c. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Paul bei 3 Würfen

c_1. insgesamt mindestens 5 Punkte holt?

c_2. alle drei Bereiche, d.h. die „10“, die „5“ und die „3“ je einmal trifft?

d. Wie oft muss Paul mindestens werfen, wenn er die „10“ mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99% mindestens einmal treffen will?

e. Für einen Wurf auf die Zielscheibe zahlt man 4 Franken als Einsatz, und man gewinnt den Geldbetrag in Franken, dessen Bereich man getroffen hat.

Welcher Verlust/Gewinn ist bei einem Wurf zu erwarten?