

Kantonsschule Alpenquai Luzern

Schriftliche Maturitätsprüfung 2016

Fach	Grundlagenfach Mathematik					
Prüfende Lehrpersonen	Sibille Burkard sibille.burkard@edulu.ch Patrik Hess patrik.hess@edulu.ch Franz Steiger franz1.steiger@edulu.ch					
Klassen	6e, 6g, 6i, 6k					
Prüfungsdatum	Freitag, 20. Mai 2016					
Prüfungsdauer	180 Minuten					
Erlaubte Hilfsmittel	 Formelsammlung "Formeln, Tabellen, Begriffe" Taschenrechner: TI-Voyage200 (ohne Handbuch), zusätzlich ein Rechner vom Typ TI-30 					
Anweisungen zur Lösung der Prüfung	 Es wird Wert auf eine saubere Darstellung gelegt. Jede Aufgabe soll einen vollständigen und nachvollziehbaren Lösungsweg enthalten. Jede Aufgabe soll auf einem neuen Bogen begonnen werden. Jeder Bogen ist mit dem Namen zu beschriften. 					
Anzahl erreichbarer Punkte	Aufgabe 1: 3 Aufgabe 2: 11 Aufgabe 3: 6 Aufgabe 4: 12 Aufgabe 5: 14 Total: 46 Für die Note 6 werden mindestens 42 Punkte benötigt.					
Anzahl Seiten (inkl. Titelblatt)	5					

Punkte Aufgabe 1 - Analysis 3

Eine bezüglich ($0 \mid 0$) punktsymmetrische Polynomfunktion 5. Grades hat im Punkt P($0 \mid 0$) die Tangente t(x) = -7x. Ausserdem ist der Punkt W($1 \mid 0$) ein Wendepunkt der Funktion. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.

Gegeben ist die Funktionsschar $f_a(x) = a \cdot \frac{x^2 + 2x}{(x-1)^2}$ für $a \neq 0$.

- a) Führen Sie für die Funktionsschar $f_a(x)$ eine Kurvendiskussion durch, indem Sie die Nullstellen, Extrem-, Wendepunkte und alle Asymptoten bestimmen.
- b) Skizzieren Sie mit Hilfe der Ergebnisse der Teilaufgabe a) den Graphen für a = 1.
- c) Bestimmen Sie a so, dass das Minimum von $f_a(x)$ den Funktionswert -1 hat.
- d) Welchen Schnittwinkel schliesst $f_a(x)$ für a = 3 mit der y-Achse ein?
- e) $f_a(x)$ schliesst mit der x-Achse ein Flächenstück ein. Bestimmen Sie a so, dass dieses die Fläche 1 hat.

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 4 - 2\sqrt{x}$.

- a) Bestimmen Sie die Gleichung der Kurvennormalen im Schnittpunkt des Graphen von f mit der x-Achse.
- b) Die beiden Koordinatenachsen und der Graph von f umschliessen ein Flächenstück, das um die x-Achse rotiert. Berechnen Sie das Volumen des entstehenden Rotationskörpers.
- c) Dem in b) betrachteten Rotationskörper wird ein gerader Kreiskegel mit Spitze im Ursprung und der x-Achse als Symmetrieachse derart einbeschrieben, dass sein Volumen maximal wird. Berechnen Sie dieses maximale Volumen.

	а	b	С	d	е	f	Punkte
Aufgabe 4 - Vektorgeometrie	2	2	1.5	2.5	1	3	12

In einem kartesischen Koordinatensystem sind in der Ebene E: 2x + y - 2z - 4 = 0 die vier Punkte A($-2 \mid 8 \mid 0$), B($0 \mid 0 \mid -2$), C($1 \mid 2 \mid 0$) und D($0 \mid 6 \mid 1$) gegeben.

- a) Zeigen Sie, dass das Viereck ABCD ein gleichschenkliges Trapez ist.
- b) Zeigen Sie, dass M(0 | 4 | 0) der Diagonalenschnittpunkt des Trapezes ist.
- c) Berechnen Sie den spitzen Schnittwinkel zwischen den beiden Diagonalen des Trapezes.
- d) Berechnen Sie den Abstand d des Punktes D von der Geraden AB.
- e) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Trapezes.

Das Trapez ABCD bildet zusammen mit einem weiteren Punkt S eine Pyramide ABCDS. Der Punkt S liegt auf der Lotgeraden zur Ebene E durch den Punkt M und hat von der Ebene E den Abstand 15 Längeneinheiten.

f) Bestimmen Sie die Koordinaten von S und das Volumen der Pyramide ABCDS (es ist ausreichend, wenn für S lediglich die Lösung mit positiver x-Koordinate berechnet wird).

	а	b	С	d	Punkte
Aufgabe 5 - Wahrscheinlichkeitsrechnung	2	5	4.5	2.5	14

An einem Schulfest wird das Spiel "Gewinn mit 4" angeboten. Dabei werden zwei sechsseitige Würfel (einer ist blau, der andere grün) geworfen und zusätzlich einmal ein Glücksrad gedreht. Bei jeder Runde dieses Spiels werden also drei Zahlen generiert. Erscheint dreimal die Zahl 4, so bedeutet dies den grössten Gewinn.

Der blaue Würfel ist fair. Der grüne Würfel hingegen wurde so verändert, dass die Zahl 4 mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ auftritt; die anderen Augenzahlen treten untereinander mit der jeweils gleichen Wahrscheinlichkeit auf.

Das Glücksrad besteht aus vier gleich grossen Sektoren mit den Zahlen 1 bis 4 darauf.

- a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A und B, wenn eine Runde "Gewinn mit 4" gespielt wird:
 - A: Die Zahl 4 tritt nicht auf.
- B: Die Zahl 4 tritt mindestens einmal auf.
- b) Kinder dürfen eine Runde "Gewinn mit 4" gratis spielen. Erscheint die Zahl 4 dreimal, so gibt es als Preis ein Lebkuchenherz.
 - b1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein bestimmtes Kind ein Lebkuchenherz gewinnt.
 - b2) Es werden zwei Lebkuchenherzen bereitgestellt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese ausreichen, wenn 30 Kinder je eine Runde "Gewinn mit 4" spielen?
 - b3) Wie viele Kinder müssen je eine Runde "Gewinn mit 4" spielen, damit die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Kind ein Lebkuchenherz erhält, mehr als 90% beträgt?
- c) Wollen Erwachsene eine Runde "Gewinn mit 4" spielen, so müssen sie 2 Franken Einsatz bezahlen. Dann drehen sie das Glücksrad und werfen die beiden Würfel. Abhängig davon, wie oft die Zahl 4 auftritt, werden unterschiedliche Geldbeträge ausbezahlt.
 - c1) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Runde "Gewinn mit 4" zweimal die Zahl 4 auftritt, $\frac{5}{36}$ beträgt.
 - c2) Bei einer 4 wird der Einsatz ausbezahlt. Erscheint die Zahl 4 zweimal, so werden 7 Franken und bei dreimaligem Erscheinen der Zahl 4 werden 12 Franken ausbezahlt. Tritt keine 4 auf, so ist der Einsatz verloren.
 - X sei der Gewinn eines Erwachsenen bei einer Runde "Gewinn mit 4". Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X und untersuchen Sie, ob das Spiel fair ist.

- d) Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Runde "Gewinn mit 4" zweimal die Zahl 4 auftritt, soll auf $\frac{1}{4}$ erhöht werden. Dazu wird beim Glücksrad der Sektor der Zahl 4 vergrössert und die anderen Sektoren so angepasst, dass sie untereinander wieder gleich gross sind. Die Würfel bleiben unverändert.
 - Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit p, mit der die Zahl 4 nun beim Glücksrad auftritt und geben Sie die Grösse des Zentriwinkels des zugehörigen Sektors an.