

Schriftliche Maturitätsprüfung 2016

Fach	Grundlagenfach Mathematik
Prüfende Lehrpersonen	Mitkova Teodora teodora.mitkova@edulu.ch Müller Stefan stefan.mueller@edulu.ch Shafai Esfandiar esfandiar.shafai@edulu.ch
Klassen	6a, 6b, 6l, 7s
Prüfungsdatum	Freitag, 20. Mai 2016
Prüfungsdauer	180 Minuten
Erlaubte Hilfsmittel	- Formelsammlung „Formeln, Tabellen, Begriffe“ - Taschenrechner: TI-Voyage200 (ohne Handbuch), zusätzlich ein Rechner vom Typ TI-30
Anweisungen zur Lösung der Prüfung	- Es wird Wert auf eine saubere Darstellung gelegt. - Jede Aufgabe soll einen vollständigen und nachvollziehbaren Lösungsweg enthalten. - Jede Aufgabe soll auf einem neuen Bogen begonnen werden. - Jeder Bogen ist mit dem Namen zu beschriften.
Anzahl erreichbarer Punkte	Aufgabe 1: 10 Aufgabe 2: 10 Aufgabe 3: 10 <u>Aufgabe 4: 10</u> Total: 40 Für die Note 6 werden mindestens 37 Punkte benötigt.
Anzahl Seiten (inkl. Titelblatt)	5

.....
 Name, Vorname

.....
 Klasse

.....
 Nummer

	a	b	c	d	Punkte
Aufgabe 1 [Vektorgeometrie]	1	3	2	4	10

Gegeben sind die Punkte $A(5/5/-3)$, $B(3/4/-1)$ und $C(5/2/0)$. Der Punkt S ist die Spitze einer Pyramide mit Grundfläche ABC und er liegt auf der Geraden g mit der Gleichung

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

- Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenkelig und rechtwinklig (mit rechtem Winkel bei B) ist.
- Berechnen Sie den Schnittpunkt M und den Schnittwinkel α der Kante AC und der Geraden g . In welchem Verhältnis teilt der Punkt M die Kante AC ?
- Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E , welche durch die Grundfläche ABC definiert ist, und berechnen Sie den Schnittwinkel β dieser Ebene mit der Geraden g .
- Bestimmen Sie die Pyramidenspitze $S \in g$ so, dass der Punkt B der Fusspunkt der Höhe der Pyramide ist. Berechnen Sie das Pyramidenvolumen V .

	a	b	c	d	e	Punkte
Aufgabe 2 [Analysis]	1	1	4	2	2	10

Gegeben ist die Funktion $f_k: y = f_k(x) = \frac{2x^2 + k \cdot x + 2}{x^2 + 1}, k \in \mathbb{R}$.

- a) Für welche Werte von k hat die Funktion f_k keine Nullstellen?
- b) Für alle $k \in \mathbb{R}$ haben die Funktionen f_k dieselbe Asymptote. Bestimmen Sie deren Gleichung.
- c) Setzen Sie $k = 2$ und bestimmen Sie die Extrem- und Wendepunkte der Funktion f_2 (nicht ganzzahlige Lösungen sind auf zwei Nachkommastellen genau zu runden).
Zeichnen Sie mithilfe dieser Punkte, sowie der Erkenntnisse aus den Teilaufgaben a) und b), den Graphen von f_2 (1 Einheit = 2 Häuschen).
- d) Die Tangente t an den Graphen von f_2 im Punkt $A(u / f_2(u))$ hat eine negative Steigung und geht durch den Punkt $B\left(\frac{1}{2} / 3\right)$. Berechnen Sie den Punkt A .
- e) Der Punkt P liegt auf dem Graphen von f_2 und hat den kleinsten Abstand vom Ursprung $O(0/0)$. Berechnen Sie den Punkt P auf zwei Nachkommastellen genau gerundet.

	a	b	c	d	e	Punkte
Aufgabe 3 [Analysis]	1.5	0.5	3.5	2	2.5	10

Gegeben ist die Funktion $f: y = f(x) = (3-x) \cdot \sqrt{x}$

- a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich, sowie die Null- und Extremalstellen der Funktion.
Zeichnen Sie anschliessend den Graphen von f in einem Koordinatensystem.

Dem Flächenstück F , das von der x -Achse und dem Graphen von f im ersten Quadranten begrenzt wird, werden rechtwinklige Dreiecke OLP mit rechtem Winkel bei L einbeschrieben. Der Eckpunkt O fällt mit dem Ursprung des Koordinatensystems zusammen, der Eckpunkt P liegt auf dem Graphen der Funktion im ersten Quadranten und der Eckpunkt L liegt auf der x -Achse.

- b) Zeichnen Sie ein beliebiges solches Dreieck OLP in der Zeichnung der Teilaufgabe a) ein.
- c) Berechnen Sie die Koordinaten des Eckpunktes P eines solchen Dreiecks, dessen Flächeninhalt maximal ist. Berechnen Sie anschliessend den Flächeninhalt des so entstandenen Dreiecks.
- d) Berechnen Sie, wie viel Prozent des Flächenstücks F , vom Dreieck maximalen Flächeninhalts aus Teilaufgabe c), bedeckt werden.

Das rechtwinklige Dreieck OLP sei ein wie oben beschriebenes Dreieck, dessen vertikale Seite PL die Länge 2 besitzt. Lässt man das Flächenstück ohne die Fläche des Dreiecks OLP um die x -Achse rotieren, so entsteht ein Rotationskörper mit Volumen V .

- e) Berechnen Sie dieses Volumen V .

	a	b	c	d	e	f	g	Punkte
Aufgabe 4 [Stochastik]	1	1	1	2	1	2	2	10

Aus einer Umfrage ist die folgende Statistik zum Wahlverhalten der Bevölkerung eines Landes bekannt:

20% der Bevölkerung sind Akademiker mit einem Hochschulabschluss; von diesen Personen wählen 30% eine linke Partei (L), 10% eine rechte Partei (R) und 60% eine der Mitteparteien (M). 80% der Bevölkerung haben keinen Hochschulabschluss; von diesen Personen wählen 10% eine linke Partei (L), 50% eine rechte Partei (R) und 40% eine der Mitteparteien (M).

Bemerkung: Wir fassen im Folgenden die relativen Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten auf.

- Zeichnen Sie zu dieser Statistik des Wahlverhaltens einen vollständigen Ereignisbaum und versehen Sie ihn mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten.
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig aus der Bevölkerung ausgewählte Person eine rechte Partei (R) wählt.
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig aus der Bevölkerung ausgewählte Person eine linke Partei (L) wählt und einen Hochschulabschluss hat.
- Wie viele Leute müssen mindestens befragt werden, damit man mit einer Wahrscheinlichkeit höher als 99% mindestens eine Person antrifft, die eine der Mitteparteien (M) wählt?
- Eine Kollegin von Ihnen behauptet, dass 50 zufällig ausgewählten Personen sich wie folgt zusammensetzen sollten: 7 würden links, 21 rechts und 22 die Mitteparteien wählen. Zeigen Sie, wie sie zu dieser Erwartung kommt.
- Nehmen Sie an, dass die Behauptung unter e) stimmt und dass zwei Personen zufällig aus dieser Gruppe ausgewählt werden. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide die gleiche Parteirichtung wählen.
- Eine Person, die von der Statistik zum Wahlverhalten der Bevölkerung Kenntnis hat, wettet jedes Mal mit einem Kollegen um 100 Franken, dass mindestens 2 Personen aus einer zufällig angetroffenen Gruppe von 5 Personen eine der Mitteparteien (M) wählen. Berechnen Sie die erwartete Gewinnsumme dieser Person.