KANTON LUZERN
Bildungs- und Kulturdepartement

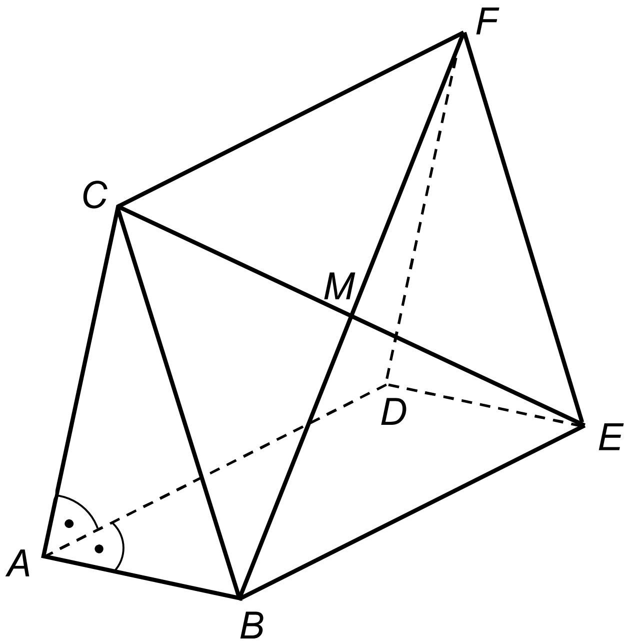
Schriftliche Maturitätsprüfung 2015

Kantonsschule Alpenquai Luzern

Fach	*Mathematik Grundlagenfach*
Prüfende Lehrperson	*Lukas Fischer (lukas.fischer@edulu.ch)*
Klasse	*6Wa*
Prüfungsdatum	*26. Mai 2015*
Prüfungsdauer	*180 Minuten*
Erlaubte Hilfsmittel	*„Formeln Tabellen, Begriffe", DMK, DPK, DMC (2013)* *Taschenrechner TI30, Voyage 200 ohne Handbuch*
Anweisungen	*Es wird Wert auf eine saubere Darstellung gelegt.* *Jede Aufgabe soll auf einem neuen Bogen begonnen werden und muss einen vollständigen und nachvollziehbaren Lösungsweg enthalten.* *Jeder Bogen ist mit Namen,Klasse und persönlicher Nummer zu beschriften.*
Anzahl erreichbarer Punkte	*Aufgabe 1: 10.5* *Aufgabe 2: 11.0* *Aufgabe 3: 11.5* *Aufgabe 4: 10.0* *Total: 43.0*
Note 6 wird vergeben für	*38 Punkte*
Anzahl Seiten (inkl. Titelblatt)	*5*

Aufgabe 1 – Vektorgeometrie	a	b	c	d	e	Punkte
	1.5	2.5	1	2.5	3	**10.5**

Das gerade Prisma *ABCDEF* mit dreieckiger Grundfläche wird durch die Punkte $A(33\,/\,18\,/\,40)$, $E(0\,/\,12\,/\,0)$, $F(-7\,/\,-12\,/\,15)$ und $M\left(\frac{17}{2}\,/\,9\,/\,\frac{55}{2}\right)$ bestimmt, wobei *M* der Mittelpunkt der Seitenfläche *CBEF* ist (*siehe Skizze*).



a. Berechnen Sie die Koordinaten der Eckpunkte *B* und *C* und zeigen Sie, dass *D* die Koordinaten $D(9\,/\,0\,/\,0)$ hat.

b. Zeigen Sie, dass das Dreieck *DEF* beim Eckpunkt *D* einen rechten Winkel hat und berechnen Sie das Volumen des Prismas *ABCDEF*.

c. Stellen Sie die Koordinatengleichung der Ebene $\mathcal{E}_{AEM}$ auf.

d. Die Gerade *g* verläuft durch den Schwerpunkt *S* des Dreiecks *DEF* und durch den Punkt *M*. Unter welchem Winkel schneidet die Gerade *g* die *xz*-Ebene?

e. Die Gerade *h* verläuft durch die Punkte *C* und *E*. Bestimmen Sie den minimalen Abstand der Geraden *h* vom Punkt *D*.

Aufgabe 2 – Infinitesimalrechnung	a	b	c_1	c_2	Punkte
	5.5	2	1.5	2	**11**

Gegeben sind die Funktionen $f(x)=\dfrac{x^3+x^2+4}{2x^2}$ und $p(x)=-\dfrac{1}{8}x^2+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$.

a. Bestimmen Sie die ersten drei Ableitungen, Definitionsbereich, Symmetrie, Nullstellen, Extrema, Wendepunkte und Asymptoten von $f(x)$ und zeichnen Sie dann den Graphen der Funktion $f(x)$. *Einheit: 2 Häuschen oder 1 cm.*

b. Zeigen Sie, dass die Parabel $p(x)$ den Graphen von $f(x)$ berührt. Bestimmen Sie auch die Koordinaten der Berührpunkte S.

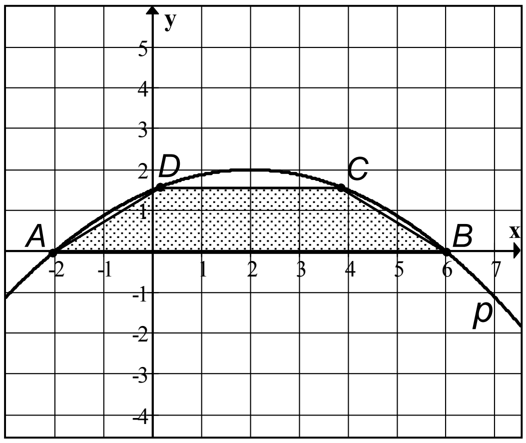
c. Ein gleichschenkliges Trapez *ABCD* sei zwischen dem Graphen der Parabel $p(x)$ und der *x*-Achse einbeschrieben. Die Punkte *A* und *B* sind die Schnittpunkte von $p(x)$ mit der *x*-Achse, *C* und *D* liegen auf dem Graphen von $p(x)$ (*siehe Figur unten*).

c_1. Zeigen Sie, dass die Fläche *F* des Trapezes *ABCD* durch die Funktion

$$F(u)=p(u)\cdot(u+2)$$

beschrieben wird, wobei *u* die *x*-Koordinate des Punktes $C(u|v)$ ist.

c_2. Bestimmen Sie die Koordinaten von *C* so, dass das einbeschriebene Trapez *ABCD* einen maximalen Flächeninhalt hat.



Aufgabe 3 – Infinitesimalrechnung	a	b	c	d	e	Punkte
	3	3	1	2	2.5	**11.5**

Gegeben ist die Funktion $f(x)=(x-2)\cdot e^{3-\frac{x}{2}}$.

a. Der Graph von $f(x)$, die Wendetangente und die x-Achse begrenzen eine Fläche, die nach rechts unbeschränkt ist. Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.

b. Eine nach oben geöffnete Parabel $p(x)=ax^2+bx+c$ schneidet den Graphen von $f(x)$ in ihrer Nullstelle und an der Stelle $x=6$. Die von den Graphen von $p(x)$ und $f(x)$ eingeschlossene Fläche hat den Inhalt $A=4\cdot e^2$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von $p(x)$.

c. Die Fläche, die vom Graphen von $f(x)$, der x-Achse und der senkrechten Geraden $x=d$ $(d>2)$ begrenzt wird, rotiert um die x-Achse. Das Volumen des so erzeugten Rotationskörpers beträgt $V=2\pi\cdot(e^4-13)$. Bestimmen Sie den Wert von d.

Nun betrachten wir die allgemeine Funktion $g(x)=(x-k)\cdot e^{3-\frac{x}{k}}$, die vom Parameter k $(k>0)$ abhängt.

d. Berechnen Sie den Wert von k so, dass die y-Koordinate des Hochpunktes des Graphen von $g(x)$ den Wert 3 hat.

e. Beweisen Sie: Die Grösse des Schnittwinkels α des Graphen von $g(x)$ mit der x-Achse hängt nicht vom Wert des Parameters k ab. Berechnen Sie auch den Winkel α.

Aufgabe 4 – Kombinatorik / Wahrscheinlichkeit	a_1	a_2	b	c_1	**Punkte**
	0.5	1	1.5	1	
	c_2	c_3	d	e	**10**
	1	1	2	2	

Frau Molar renoviert das Wartezimmer ihrer Dentalhygienepraxis (drei Wände und eine Fensterfront). Für die Wände stehen sieben verschiedene Farben zur Verfügung.

a. Auf wie viele Arten kann sie die Wände des Wartezimmers streichen, falls

a_1. alle drei Wände in einer anderen Farbe gestrichen werden sollen?

a_2. genau zwei der drei Wände mit derselben Farbe gestrichen werden sollen?

An jeder frisch gestrichenen Wand werden zwei Stellen ausgewählt, an denen Frau Molar je ein Diplom aufhängen könnte.

b. Auf wie viele verschiedene Arten kann sie ihre vier Diplome aufhängen, unter der Bedingung, dass an jeder Wand mindestens ein Diplom hängen soll? *Beachten Sie, dass es eine Rolle spielt, an welchem der beiden Stellen an einer Wand das Diplom hängt.*

Aus Erfahrung weiss Frau Molar, dass 60% ihrer Kunden Frauen, die restlichen 40% Männer sind. Am Morgen hat sie sieben halbstündige Termine zu vergeben. Diese Termine sind immer vollständig ausgebucht.

c. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass an einem bestimmten Morgen

c_1. alle sieben Termine von Personen desselben Geschlechts belegt werden.

c_2. genau zwei Frauen und fünf Männer gebucht sind.

c_3. mehr Männer als Frauen gebucht sind.

d. Es gibt immer wieder Kunden, die an einem vereinbarten Termin nicht erscheinen. Im Schnitt vergessen 7% aller Männer und 4% aller Frauen den vereinbarten Termin. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass von sieben zufällig ausgewählten Personen der Kundschaft alle den Termin wahrnehmen?

e. Das Marktforschungsunternehmen „MFU“ wird beauftragt, die Zufriedenheit der Kunden zu erfragen. „MFU“ telefoniert zufällig ausgewählten Kunden aus dem aktuellen Kundenstamm der Dentalhygienepraxis. Frau Molar möchte insbesondere mehr über die Gründe wissen, die dazu führen, dass Termine nicht eingehalten werden.
Wie viele Telefonnummern von Kunden muss „MFU“ mindestens verlangen, damit es mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99% mindestens eine Person erreicht, die den letzten Termin verpasst hat. *Verwenden Sie den Wert 0.948, falls Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person den Termin nicht vergisst, nicht berechnen können.*