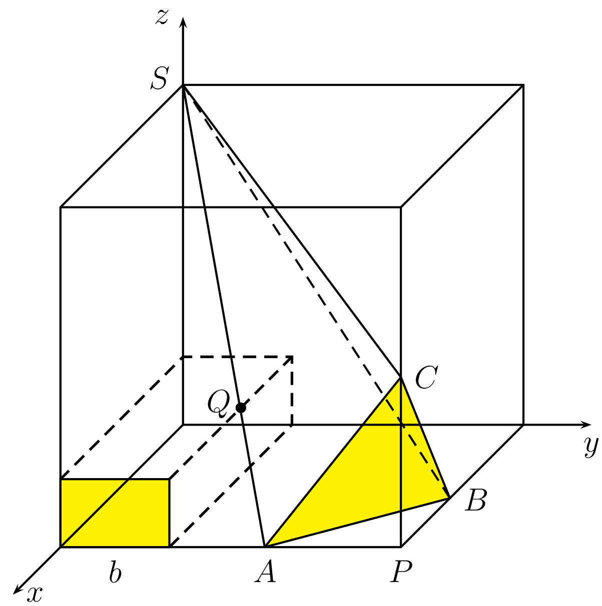
		a	b	c	d	
Aufgabe 1		2.5	1	2	4.5	**10 Punkte**

In einem Würfel mit den Eckpunkten $O(0/0/0)$, $P(10/10/0)$ und $S(0/0/10)$ befindet sich eine Pyramide mit einem Dreieck als Grundfläche und der Spitze S (vergl. Skizze).
Die Eckpunkte der Pyramidengrundfläche sind $A(10/6/0)$, $B(6/10/0)$ und $C(10/10/5)$.



a) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E, in der die Grundfläche der Pyramide liegt.

b) Welchen Winkel schliessen die Grundflächen von Würfel und Pyramide ein?

c) Untersuchen Sie, ob die Höhe der Pyramide auf der Diagonalen PS des Würfels liegt.

d) Zusätzlich zur Pyramide soll noch ein Quader der Breite b in den Würfel gelegt werden. Die Abmessungen des Quaders werden so gewählt, dass er die Pyramide nur in einem Punkt Q der Pyramidenkante AS berührt (vergl. Skizze).
Welches Volumen hat ein solcher Quader mit der Breite $b = 4$?
Welche Werte kann das Volumen eines solchen Quaders annehmen, wenn die Breite b variabel ist?

		a	b	c	d	e	
Aufgabe 2		4.5	1.5	1	3	2	**12 Punkte**

Gegeben ist die Funktion $f(x) = (\cos(x))^2 + \cos(x) - 1$ mit dem Definitionsbereich $\mathbb{R}$.

a) Diskutieren Sie die Funktion f in Bezug auf die Nullstellen und die Extremalstellen. Zeichnen Sie den Graphen von f im Bereich $0 \leq x \leq 2\pi$. Auf den `solve`-Befehl ist zu verzichten.

b) Finden Sie die Gleichung der Tangente t an den Graphen von f, welche durch den Punkt $P\left(\frac{\pi}{2}/f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ verläuft.

c) Was können Sie über die Symmetrie der Funktion f aussagen? Begründen Sie die Aussage.

d) Finden Sie als eine zweite Funktion g eine ganzrationale Funktion dritten Grades, welche im Punkt $(3/0)$ ein Extremum hat, durch den Punkt $(2/4)$ geht und bei $x = \frac{4}{3}$ einen Wendepunkt hat.

e) Der Graph der Funktion g aus Teilaufgabe d) schneidet den Graphen der Tangente t aus Teilaufgabe b).
Bestimmen Sie den Schnittpunkt im 2. Quadranten und den Winkel, den die Graphen von g und t dort einschliessen.
Hinweis: Falls Sie die Teilaufgaben b) und d) nicht lösen konnten, rechnen Sie mit den folgenden (falschen) Funktionsgleichungen: $g(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 19$ und $t(x) = -x + \pi$.

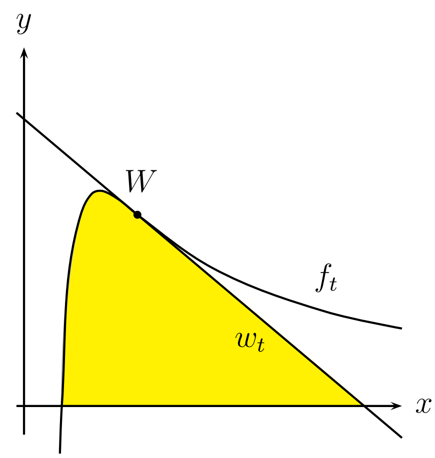
	a	b	c	d	
Aufgabe 3	2.5	2.5	4	2	**11 Punkte**

Gegeben ist die Funktionenschar f_t mit der Gleichung $f_t(x) = \frac{6x-t}{x^2}$, wobei $t > 0$.

a) Die Kurve f_t schliesst im 1. Quadranten mit der x-Achse eine ins Unendliche reichende Fläche ein. Zeigen Sie, dass dieser Fläche kein endlicher Inhalt zugewiesen werden kann. Argumentieren Sie sorgfältig.

b) Die im 1. Quadranten unterhalb der Kurve f_t liegende Fläche rotiert um die x-Achse. Der entstehende Rotationskörper soll das Volumen $V = 18\pi$ haben. Wie gross ist der exakte Wert von t? Argumentieren Sie sorgfältig.

c) Es sei w_t die Wendetangente der Kurve f_t. Die Kurve f_t, die Wendetangente w_t und die x-Achse begrenzen eine Fläche (vergl. Skizze). Ist der Inhalt dieser Fläche abhängig von t?



d) Für diese Aufgabe sei $t = 6$. W ist der Wendepunkt von f_6. Das Dreieck ABW liegt vollständig innerhalb der Fläche, die von der Kurve f_6 und der x-Achse eingeschlossen wird. Seine Basis $\overline{AB}$ liegt auf der x-Achse. Bestimmen Sie die Ecken A und B, für die der Flächeninhalt des Dreiecks maximal ist.

	a	b	c	d	e	
Aufgabe 4	2	1	2	2	4	**11 Punkte**

Ein regelmässiges Dodekaeder wird als Spielwürfel verwendet. Die zwölf Flächen sind wie folgt beschriftet:

$$1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 3 \quad 3 \quad 3 \quad 3 \quad 7 \quad 7$$

a) Wie viele Würfe benötigt man, bis man mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99% mindestens einmal die Zahl 7 geworfen hat?

b) Sie werfen das Dodekaeder so lange, bis die Zahl 7 auftritt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind dazu höchstens 4 Würfe notwendig?

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, bei 21 Würfen
c1) genau dreimal die 7 zu werfen.
c2) mindestens dreimal die 7 zu werfen.

d) Das Dodekaeder wird so lange geworfen, bis die Summe der geworfenen Zahlen mindestens 4 beträgt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind dazu genau zwei Würfe nötig?

e) Mit einem Einsatz von 3 Fr. dürfen Sie das Dodekaeder einmal werfen. Die Augenzahl ist der Gewinn.
e1) Berechnen Sie den durchschnittlich zu erwartenden Gewinn.
e2) Dieses Spiel ist offenbar nicht fair. Sie dürfen eine natürliche Zahl z aussuchen und auf dem Dodekaeder so viele Einsen durch z ersetzen, wie Sie wollen. Finden Sie alle Möglichkeiten, dies so zu tun, dass das Spiel fair wird.