

Aufgabe 1: Näherungsverfahren

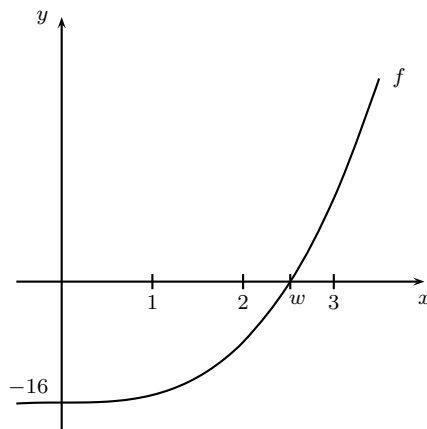
a b

5 4 **9 Punkte**

Lassen wir vom Taschenrechner den Wert $\sqrt[3]{16}$ ermitteln, so beginnt ein Näherungsverfahren zu laufen: der Taschenrechner kennt den Wert auch nicht "auswendig".

Näherungsverfahren für die Berechnung von Kubikwurzeln gibt es einige. Manche arbeiten mit graphischen Überlegungen.

Die Kubikwurzel $w = \sqrt[3]{16}$ ist die Nullstelle der Funktion $f(x) = x^3 - 16$. Der Graph von f ist nachfolgend gezeichnet:



a) Ein altes Näherungsverfahren ist die *Regula falsi*. Erklären Sie, wie mit diesem Verfahren die Kubikwurzel $w = \sqrt[3]{16}$ angenähert werden kann. Führen sie anschliessend die ersten zwei Approximationsschritte durch, indem Sie mit den zwei Näherungen $a_0 = 2$ und $b_0 = 3$ beginnen.

b) Ein anderes wichtiges Näherungsverfahren ist das *Newton-Verfahren*. Beschreiben und erläutern Sie insgesamt vier fundamentale Unterschiede zwischen dem *Newton-Verfahren* und der *Regula falsi*. Veranschaulichen Sie diese Unterschiede mit Hilfe einer Graphik. Sie können zu Aspekten wie beispielsweise Methodik, benötigte mathematische Werkzeuge oder Konvergenz Bezug nehmen.

Aufgabe 2: Gleichungen

a b

3.5 3.5 **7 Punkte**

a) Gegeben ist die kubische Gleichung

$$x^3 - 7x^2 + 81x - 567 = 0.$$

Diese Gleichung hat eine natürlichzahlige Lösung: $x = 7$.

Weisen Sie mit Hilfe einer Linearfaktorabspaltung und durch das Lösen einer quadratischen Gleichung nach, dass die gegebene kubische Gleichung keine weiteren reellen Lösungen mehr besitzt. Wie lauten die zwei komplexen Lösungen der kubischen Gleichung?

b) Bestimmen Sie die Lösung der komplexen Gleichung ohne rechnerische Hilfsmittel:

$$(5 + 2i)z + 9 = (2 - 8i)\bar{z} + 35i$$

	a	b	c	
Aufgabe 3: Vektorgeometrie	3	2	4	9 Punkte

Gegeben sind die Gerade $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ und der Punkt $D(2/9/17)$.

a) Die zwei Eckpunkte A und B des Quadrates $ABCD$ liegen auf der Geraden g . Bestimmen Sie A und B für den Fall, dass die x -Koordinate von B grösser als die x -Koordinate von A ist.

Das Quadrat $ABCD$ bildet zusammen mit der Spitze $S(6/11/2)$ eine quadratische Pyramide, die nicht gerade ist.

b) Welchen Inhalt hat die Seitenfläche ADS ?

c) Welchen Abstand hat die Spitze S von der Grundfläche der Pyramide?

	a	b	c	d	
Aufgabe 4: Beschränktes Wachstum	1.5	3	1.5	1	7 Punkte

Bei einer Frau bricht eine Krankheit aus, die ihre Körpertemperatur ansteigen lässt. Als das Fieber hoch ist, nimmt die Frau ein fiebersenkendes Medikament zu sich. Von diesem Zeitpunkt an sinkt die Temperatur nach der Gesetzmässigkeit des beschränkten Wachstums und nähert sich der normalen Körpertemperatur.

Die Körpertemperatur $f(t)$, die in $^{\circ}\text{C}$ gemessen wird (t sei die Zeit in Stunden nach der Einnahme des Medikaments), gehorche der folgenden Differentialgleichung (DGL):

$$f'(t) = 16.425 - 0.45 \cdot f(t)$$

a) Warum ist diese Gleichung eine DGL des beschränkten Wachstums? Welche charakteristischen Parameter können Sie dieser DGL entnehmen?

b) Lösen Sie die DGL mit Hilfe einer Separation der Variablen.

c) 1.5 Stunden nach der Einnahme des Medikaments ist die Körpertemperatur auf 38.3°C gesunken. Wie hoch war das Fieber zum Zeitpunkt der Medikamenteneinnahme?

d) Wie lange dauert es, bis die Körpertemperatur um ein Grad niedriger ist, als sie zum Zeitpunkt der Medikamenteneinnahme war?

	a	b	c	
Aufgabe 5: Variation der Konstanten	2.5	3	0.5	6 Punkte

Gegeben ist die inhomogene Differentialgleichung (DGL)

$$y' - \frac{2y}{x} - x + 3x^3 = 0,$$

wobei $x > 0$ ist.

a) Beweisen Sie mit einer Separation der Variablen, dass für die Lösung y_h der homogenen DGL die Gleichung $y_h(x) = c \cdot x^2$ gilt.

Bestimmen Sie sodann

b) eine partikuläre Lösung der inhomogenen DGL mit einer Variation der Konstanten.

c) die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL.

	a1	a2	a3	b1	b2	
Aufgabe 6: Statistische Tests	1	3	2	1	3	10 Punkte

Die Firma “QuickWax” produziert ein neues Wachs für Langlaufskis, das bei allen Schneesorten für gute Laufbedingungen sorgen soll. Die Firma schickt ihre Vertreter aus, die das neue Produkt in Sportgeschäften bewerben sollen. Das Ziel ist, dass mindestens 35% der Sportgeschäfte das Wachs in ihr Sortiment aufnehmen.

Nach einiger Zeit werden 50 der beworbenen Sportgeschäfte gefragt, ob sie das neue Wachs in ihr Sortiment aufgenommen hätten. Nur 13 antworten mit Ja.

- a1) Formulieren Sie die Hypothesen.
- a2) Bestimmen Sie die Testverteilung. Geben Sie den Verwerfungsbereich für ein Signifikanzniveau von 2.5% an und leiten Sie die Entscheidungsregel her. Darf die Firma “QuickWax” aufgrund der Stichprobe behaupten, die Vertreter hätten ihren Job zu wenig gut gemacht?
- a3) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art, wenn die Vertreter nur 20% der Sportgeschäfte vom neuen Wachs überzeugt haben?

Nach diesem ersten ernüchternden Versuch, das Wachs zu etablieren, soll ein wissenschaftliches Experiment den Durchbruch bringen. Dieses Experiment soll prüfen, ob das neue Wachs für bessere Laufergebnisse sorgt; dass das neue Wachs ein schlechteres Resultat erzielen könnte, wird nicht in Betracht gezogen.

20 Läufer werden gebeten, eine vorgegebene Laufstrecke zweimal bei gleichen Wetter- und Schneebedingungen zu laufen: einmal mit dem herkömmlichen Wachs, einmal mit dem neuen. Die Läufer wissen nicht, mit welchem Wachs ihre Skis präpariert wurden. Die Zeiten werden gemessen und in *min* angegeben. Die folgende Tabelle enthält die Ergebnisse.

Läufer Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Zeit mit herkömmlichem Wachs	45	37	59	47	48	65	31	39	48	73
Zeit mit neuem Wachs	43	40	54	46	45	59	33	38	49	66

Läufer Nr.	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Zeit mit herkömmlichem Wachs	55	58	43	67	56	60	42	47	56	50
Zeit mit neuem Wachs	52	56	42	62	60	58	39	45	52	47

- b1) Formulieren Sie die Hypothesen.
- b2) Führen Sie den einseitigen Vorzeichentest mit dem Signifikanzniveau $\alpha = 5\%$ durch. Bestimmen Sie die Entscheidungsregel. Ist das neue Wachs signifikant besser als das herkömmliche?