Resultate

Aufgabe 1

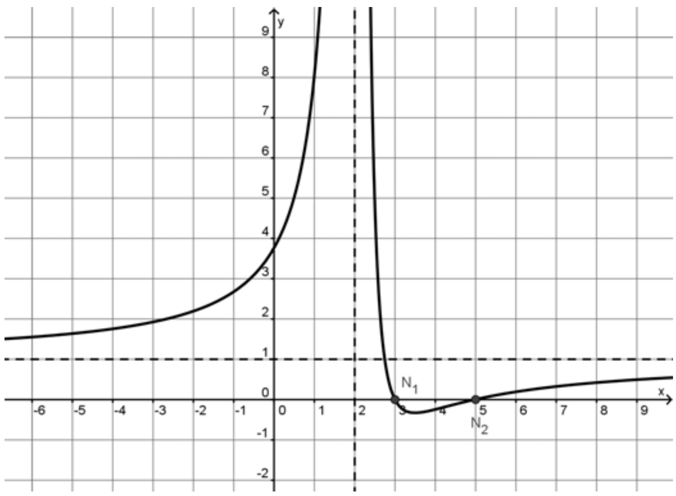
a) $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$\underline{NS}: x_1 = 3;\ x_2 = 5$

$\underline{Asymptoten}: As_1:\ x = 2;\ As_2:\ y = 1$

$\underline{Extrema}:\ Tiefpunkt\left(\frac{7}{2}\middle|-\frac{1}{3}\right)$

$\underline{Wendepunkte}:\ W\left(\frac{17}{4}/-\frac{5}{27}\right)$



b) $P\left(0\middle|\frac{15}{4}\right); t \equiv y = \frac{7}{4}x + \frac{15}{4}$

c) $t:\ y = -\frac{121}{96}x + \frac{15}{4};\ \ Q\left(\frac{34}{11}\middle|\frac{-7}{48}\right)$

d) $A = 4 \cdot \ln(3) - 4$

e) $p:\ \ y = 3\cdot(\ln(3)-1)\cdot x^2 - 24\cdot(\ln(3)-1)\cdot x + 45\cdot(\ln(3)-1)$

Aufgabe 2

a)

$f_1(x) = \ln(x+t) - t = 0 \Leftrightarrow \ln(x+t) = t \Leftrightarrow e^t = x + t \Leftrightarrow \underline{\underline{x = e^t - t}}$

$f_2(x) = s\cdot x - t = 0 \Leftrightarrow s\cdot x = t \Leftrightarrow \underline{\underline{x = \frac{t}{s}}}$

b) $$\left.\begin{array}{l} 1)\quad \lim\limits_{x\to 0} f_1(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\ln(x+t)-t\right) = \ln(t)-t \\ 2)\quad f_2(0) = s\cdot 0 - t = -t \end{array}\right\} \ln(t)-t=-t \Leftrightarrow \ln(t)=0 \Rightarrow \underline{\underline{t=1}}$$

c) $$\left.\begin{array}{l} 1)\quad \lim\limits_{x\to 0} f_1'(x) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x+t} = \dfrac{1}{t} \\ 2)\quad f_2'(x) = s \end{array}\right\} \Rightarrow s = \frac{1}{t} = \frac{1}{1} \Rightarrow \underline{\underline{s=1}}$$

d) $\overline{f_1}(x) = y \qquad = e^{x+t} - t$

e) bei t = ln(6) ist ein Maximum

Aufgabe 3

a) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix}-4\\3\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4-4\\0-0\\5-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\3\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix} = 0 \quad\Rightarrow\quad \triangle ADE \ \ ist\ \ rechtwinklig$

b)

$\Pr isma\ \ ist\ \ gerade\ \ weil:$

$I)\quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix}6\\8\\0\end{pmatrix}$

$II)\quad \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 0 \ \ und \quad \overrightarrow{EF}\perp\overrightarrow{AE} \Leftrightarrow \overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{AE} = 0$

$\underline{V_{Prisma}} = 125$

$c)\quad (i)Koordinaten$

$\square ABCD: P: Mitte\ von\ A(4|0|0)\ und\ C(6|11|0): P(5|5\tfrac{1}{2}|0)$

$\square ABFE: Q: Mitte\ von\ A(4|0|0)\ und\ F(10|8|5): Q(7|4|2\tfrac{1}{2})$

$\square DCFE: R: Mitte\ von\ D(0|3|0)\ und\ F(10|8|5): R(5|5\tfrac{1}{2}|2\tfrac{1}{2})$

$(ii)\ Flächenverhältnis$

$$\frac{A_{\triangle ADE}}{A_{\triangle PQR}} = 4:1$$

d) I) $E_1:\ \ 4x-3y-5z+9=0$

II) $C(\ 6\,|\,11\,|\,0\,) \in E_2 \equiv 10\cdot 6 - 5\cdot 11 - \quad 0 - 5 = 0\ ok$

$E(\ 4|\ 0\,|\,5\,) \in E_2 \ \equiv 10\cdot 4 - 0 \quad\ -7\cdot 5 - 5 = 0\ ok$

III) $g:\vec{r}=\begin{pmatrix}6\\11\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-2\\-11\\5\end{pmatrix}$

IV) $\measuredangle\left(E_1,E_2\right)=\gamma=\arccos\frac{9}{\sqrt{87}}\approx 15.23°$

Aufgabe 4

a) 1860480

b) 120

c) $p(...)=\frac{günstig}{möglich}=\frac{2\cdot\binom{30}{2}}{\binom{150}{2}}\approx 7.8\%$

d) 1260

e) 7315

f) Definition der Ereignisse:

S: Zimmer mit Seesicht

S^C: Zimmer ohne Seesicht

D: Zimmer mit Dusche

D^C: Zimmer ohne Dusche

$$P\left(D/S\right)=1-P\left(D^C/S\right)=1-\frac{1}{6}=\underline{\underline{\frac{5}{6}}}$$

g) 16.4%

h) 1.4%

Resultate

1) a) Koordinaten von D in die Koordinatengleichung einsetzen:
$2\cdot(-1)-(-4)+7\cdot(-3)+19=0$.

b) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=\begin{pmatrix}6\\5\\-1\end{pmatrix}$ bzw. $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}-1\\5\\1\end{pmatrix}$

c) ≈ 36.74

d) Schnittpunkt $U(0.75, -4, -3.5)$

Den Vektor $\overrightarrow{AU}$ als Linearkombination von $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$ darstellen:

$\overrightarrow{AU}=s\cdot\overrightarrow{AB}+t\cdot\overrightarrow{AD} \quad \Rightarrow s=0.25,\ t=0.75$

Beide Koeffizienten sind zwischen 0 und 1 also trifft der Strahl den Spiegel.

e) $\approx 45.27°$

f) $i:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.75\\-4\\-3.5\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}2.5\\0.5\\-4.5\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}-1.75\\-4.5\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.75\\-4\\-3.5\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}2.5\\0.5\\-4.5\end{pmatrix}\Rightarrow s=-1$ Ortsvektor von S erfüllt die Geraden-gleichung

von i, also trifft der reflektierte Strahl den Punkt S

2) a) i) $\approx 15.11°$

ii) ≈ 5.07

b) i) $W(1|2)$

ii) $P_1(-1|4), P_2(3|0)$

iii) $A_1:A_2=9:7$

iv) $\approx 16.93\,VE$

c) $b\approx 2.48$, $A_{max}\approx 3.85\,FE$

3) a) 3628800

b) 90

c) i) $\frac{1}{243}$

ii) ≈ 0.2276

iii) 12 mal

d) 64

e) i)

k	0	1	2	3	4	5	6
P(X=k)	0.05	0.05	0.05	0.10	0.40	0.20	0.15

ii) ≈ 3.95

4) a) $f(x)=2x^3+3x^2-x+1$

b) $x_{max}=\frac{2s}{3}$, $y_{max}=\frac{h}{3}$

KURZLÖSUNGEN SERIE C

Resultate

Resultate Aufgabe 1

a)

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \left[\text{oder } \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \right]$$

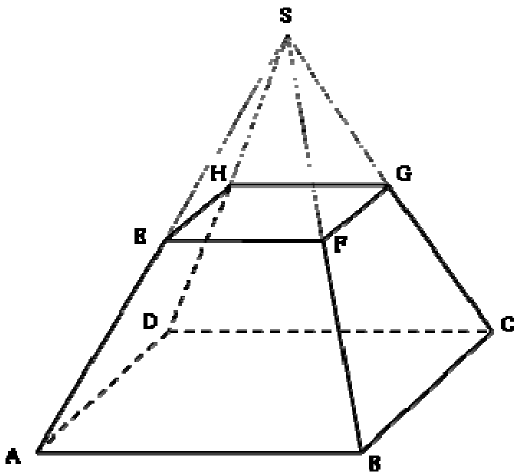
$\Rightarrow$ <u>Parallelogramm</u>

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{64+64+16} = \sqrt{144} = 12$$

$\Rightarrow$ <u>Rhombus</u>

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = 64 - 32 - 32 = 0$$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD} \Rightarrow$ $\underline{\underline{\text{Quadrat}}}$ $q.e.d.$



b)

$$\underline{\underline{E_{ABC}: \; x + 2y - 2z - 25 = 0}}$$

$$\left[E_{ABC}: \; \vec{r} = \begin{pmatrix} -3 \\ 11 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}}^{\overrightarrow{AB}} + t \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}}^{\overrightarrow{AD}} \right]$$

c)

$\alpha \approx \underline{\underline{64.76°}}$

d)

$$\underline{\underline{P_1\left(-\frac{1}{3} / \frac{13}{3} / \frac{11}{3}\right) \quad P_2(3/5/3)}}$$

e)

$$\underline{\underline{S(-1/-3/11)}}$$

f)

$$n \cap E_{ABC} = \{Q\}: \quad \underline{Q(1/10/-2)} \quad d(E, E_{ABC}) = d(E,Q) = \left|\overrightarrow{EQ}\right| = \underline{\underline{9}}$$

Resultate Aufgabe 2

a)

$\underline{\underline{a=1 \quad b=1}}$

b)

(1) Definitionsbereich: Nenner $\underline{\underline{D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}}}$

(2) Nullstellen: $\underline{\underline{\text{keine Nullstellen}}}$

(3) Extrema:

$\underline{\underline{H\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}/\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\approx H(-1.62/-1.62)}}$ $\underline{\underline{T\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}/\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\approx T(0.62/0.62)}}$

(4) Wendepunkte: $\underline{\underline{\text{keine Wendepunkte}}}$

(5) Asymptoten: $\underline{\underline{\text{vertikale Asymptote } x=-\frac{1}{2}}}$

$\underline{\underline{\text{schräge Asymptote } y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}}}$

c)

$\varphi \approx \underline{\underline{23.20°}}$

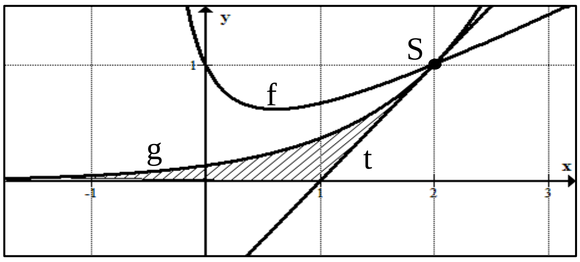
d)

Tangente t in $S(2/1)$:

$\underline{t: y=x-1}$

Inhalt der schraffierten Fläche:

$A=\underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

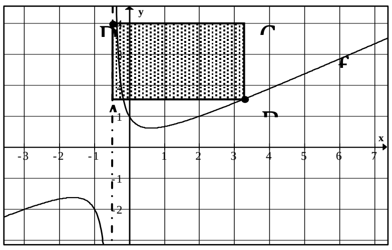


e)

$B(u/f(u))$ u > 0.

Zielfunktion
(Flächeninhaltsfunktion):

$A(u)=\underline{-\frac{1}{2}u^2+4u-\frac{3}{2}}\ [Parabel!]$

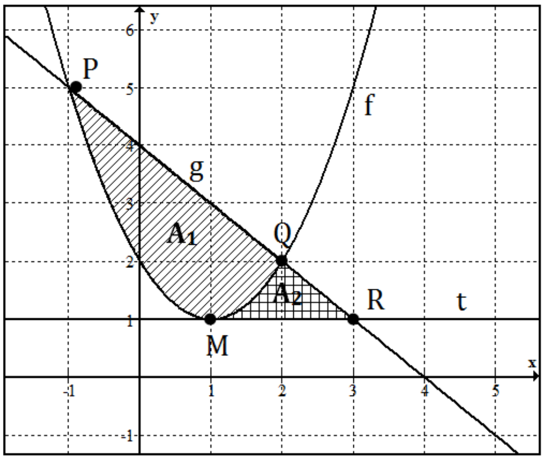


Das Rechteck hat für $B(4/f(4))=\underline{\underline{B\left(4/\frac{17}{9}\right)}}$ maximalen Flächeninhalt $\underline{\underline{A_{\max}=\frac{19}{2}=9.5}}$

Resultate Aufgabe 3

a)

$$A_1 = \int_{-1}^{2} \left(g(x) - f(x)\right) dx = \underline{\underline{4.5}}$$



b)

Gleichung der Tangente in $M(1/1)$: $t(x) = 1$

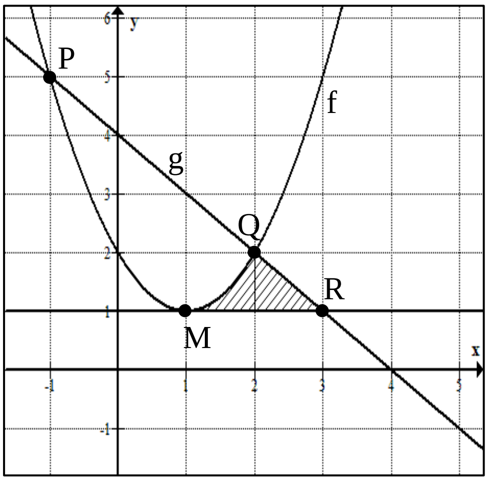
$\{R\} = t \cap g: \quad 1 = -x + 4 \Leftrightarrow x = 3 \;\Rightarrow\; \underline{R(3/1)}$

$M(1/1), Q(2/2), R(3/1)$

$$V_1 = \pi \int_{1}^{2} \left(f(x)^2 - 1^2 \right) dx = \underline{\frac{13}{15}\pi}$$

$$V_2 = \pi \int_{2}^{3} \left(g(x)^2 - 1^2 \right) dx = \underline{\frac{4}{3}\pi}$$

$$V = V_1 + V_2 = \underline{\underline{\frac{11}{5}\pi}}$$



c)

$$\underline{\underline{h: y = -x + \frac{11}{4}}}$$

d)

$P(-1/5)\; Q(2/2)\; M(1/1)$

$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{MQ} = 0 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{MQ} \quad q.e.d.}}$

e)

$A_{rechtw.Dreieck} = \underline{3}$ $\qquad$ $\underline{\underline{A_\Delta : A = 2:3}}$

f)

k durch $Q(2/2)$: $\underline{y = m(x-2) + 2 = mx + 2 - 2m}$

Schnittpunkt S:

$k(x) = f(x) \;\Leftrightarrow\; mx + (2-2m) = x^2 - 2x + 2 \;\Leftrightarrow\; x_1 = m, \left[x_2 = 2\right]$

$\underline{\underline{S(m/\cdot)}}$ $q.e.d.$

Resultate Aufgabe 4

a)

a$_1$) $\underline{\underline{5040}}$

a$_2$) $\underline{\underline{144}}$

a$_3$) $\underline{\underline{720}}$

b)

b$_1$) $P(\text{"viermal rot"}) \approx \underline{\underline{0.03014}}$

b$_2$) $P(\text{"erstmals beim 4. Versuch rot"}) = \frac{1715}{20736} \approx \underline{\underline{0.0827}}$

b$_3$) $P(\text{" je einmal grün, blau, gelb und rot"}) == \frac{5}{72} = \underline{\underline{0.069\overline{4}}}$

c)

Die wohltätige Organisation nimmt **pro Spiel 1.14 Fr. ein, erreicht also ihr Ziel**.

d)

$\underline{n \geq 97.89}$

Frau Weiss muss mindestens $5Fr. \cdot 97.89 \approx 489.50Fr.$ $\underline{\underline{\approx 490Fr.}}$ mitnehmen.

e)

e$_1$) $P(\text{"genau dreimal blau in sieben Drehungen"}) == \frac{2835}{16384} \approx \underline{\underline{0.1730}}$

e$_2$) $P(\text{"mindestens fünfmal rot in sieben Drehungen"}) =\approx \underline{\underline{0.1133}}$

Schriftliche Maturaprüfung 2013, Grundlagenfach Mathematik

Kurzlösungen

Aufgabe 1:

a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\qquad \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ $\qquad \rightarrow$ Viereck $ABCD$ ist Parallelogramm

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$

$\Rightarrow$ Viereck $ABCD$ ist Rechteck

b) Netzebene: $E : 3x + 4y + D = 0$

c) Gesucht ist die Minimaltransversale.

Distanzvektor: $\overrightarrow{NP} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad |\overrightarrow{NP}| = \sqrt{1.5^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{10.25} \approx 3.2\ cm > 2\ cm$

Der Ball geht also knapp an der Netzkante vorbei.

d) Schnittpunkt S von g mit der Tischebene: $S(-4/218.5/74)$

Linearkombination: $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + 0.56 \cdot \overrightarrow{AB} + 0.86 \cdot \overrightarrow{BC}$

Da für beide Koeffizienten $0.5 < u, v < 1$, trifft der Ball auf der Tischplatte von Olaf auf.

Aufgabe 2:

a) $c = \frac{9}{2}$ $\qquad \rightarrow$ Schnittpunkte: $S(\pm 2\sqrt{2}/\frac{1}{2})$

b) $a = \frac{27 - \sqrt[3]{12150}}{2} \approx 2.005$

c) $V = 144\pi + 18\pi = 162\pi$

d) Weg von Kari: $s_f = \ln(2\sqrt{6} + 5) + 10\sqrt{6} \approx 26.7873$

Weg von Berti: $s_g = 8 \cdot \ln(\sqrt{11} + \sqrt{3}) - 12 \cdot \ln(2) + \sqrt{33} \approx 10.3798$

Kari muss $\frac{26.787}{10.380} \approx 2.58$-mal so schnell wie Berti sein.

Aufgabe 3:

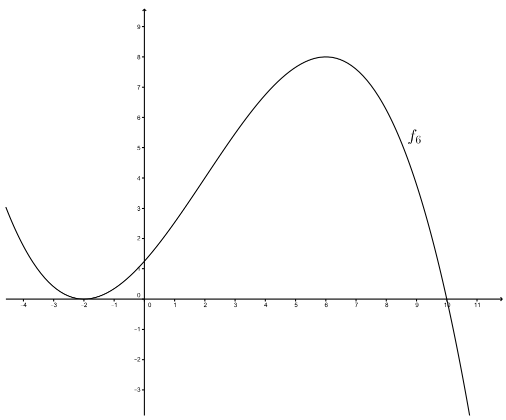
a) **Nullstellen:** $x = -2$ und $x = 10$

Extremalpukte: Tiefpunkt $T(-2/0)$, Hochpunkt $H(6/8)$

Wendepunkt: $W(2/4)$

Symmetrien: Punktsymmetrie bezüglich W

b)



c) $k = -3$

d) Wendepunkt: $W(\frac{2}{3}(k-3) / \frac{k^3}{54} - \frac{k^2}{12} + \frac{3k}{4} - \frac{3}{2})$

$y-$Koordinate des Wendepunktes: $y(k) = \frac{k^3}{54} - \frac{k^2}{12} + \frac{3k}{4} - \frac{3}{2}$

Ableitung: $y'(k) = \frac{k^2}{18} - \frac{k}{6} + \frac{3}{4} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 2k^2 - 6k + 27 = 0$

Lösungsformel: $k_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 2 \cdot 27}}{4} = \frac{6 \pm \sqrt{-180}}{4} \notin \mathbb{R}$

Aufgabe 4:

a1) P(mehr als 10 Autos mit zu viel S) ≈ 0.002

a2) Erwartungswert: $\mu = np = 50 \cdot \frac{1}{20} = 2.5$

P(weniger als 2.5 Autos mit zu viel F) ≈ 0.541

a3) P(mind. 35 Autos haben nichts zuviel geladen) ≈ 0.983

b) 90 Kontrollen

c) D : Auto enthält Drogen
H : Hund schlägt an

c1) $P(D \mid H) \approx 0.073$ (erschreckend tief!)

c2) $P(\bar{D} \mid \bar{H}) \approx 0.9996$ (hoch!)

d) 2.4 Aperos.

Aufgabe 5:

a) Ab dem 35. Halbkreisbogen übersteigt die Summe den Wert 157.

b) Grenzwert: $s = \frac{1250}{41}\pi \approx 30.49\pi$