KANTON LUZERN
Bildungs- und Kulturdepartement

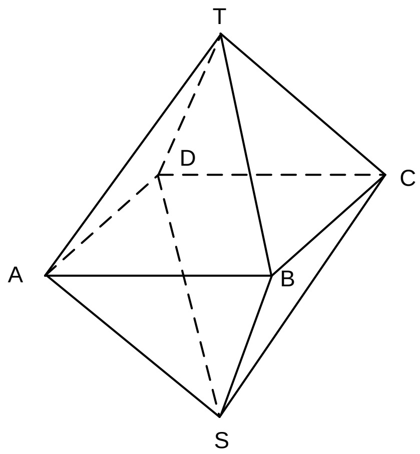
Schriftliche Maturitätsprüfung *2011*

Kantonsschule Luzern

Fach	*Mathematik Grundlagenfach*
Prüfende Lehrperson	*Elisabeth Henrich (elisabeth.henrich@edulu.ch)*
Klassen	*6Ra / 6Lc (4 Schüler)*
Prüfungsdatum	*23. Mai 2011*
Prüfungsdauer	*180 Minuten*
Erlaubte Hilfsmittel	• *Formelsammlung „Formeln und Tafeln", DMK* • *Taschenrechner TI30, Voyage 200 (ohne Handbuch)*
Anweisungen zur Lösung der Prüfung	• *Es wird Wert auf eine saubere Darstellung gelegt.* • *Jede Aufgabe soll auf einem neuen Bogen begonnen werden und muss einen vollständigen und nachvollziehbaren Lösungsweg enthalten.* • *Jeder Bogen ist mit dem Namen zu beschriften.* • *Der Einsatz der Hilfsmittel ist klar anzugeben.*
Anzahl erreichbarer Punkte	*Aufgabe 1: 10* *Aufgabe 2: 11* *Aufgabe 3: 7* *Aufgabe 4: 10* *Aufgabe 5: 6* *Total: 44* *Die Note 6 wird für 40 Punkte erteilt.*
Anzahl Seiten (inkl. Titelblatt)	*4*

	a	b	c	d	Punkte
Aufgabe 1	3	1	2	4	**10**

Acht transparente dreieckige Werbeflächen sollen wie in der Abbildung in der Form eines Oktaeders* angeordnet werden.
Die Anordnung wird in einem dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystem beschrieben; eine Einheit entspricht einem Meter.
Vom Oktaeder ABCDST sind die folgenden Punkte gegeben.
$A\left(2|0|4\right), B\left(-2|5|1\right), C\left(2|10|4\right)$ und $T\left(-1|5|8\right)$.
Geben Sie immer exacte Werte an.



Oktaeder ABCDST
(Abbildung nicht massstäblich)

a) Weisen Sie nach, dass das Dreieck ABC gleichschenklig und rechtwinklig ist.

b) Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes D so, dass das Viereck ABCD ein Quadrat ist.

c) Stellen Sie eine Koordinatengleichung derjenigen Ebene auf, in der die Punkte A, B und T liegen.

d) Um eine effektvolle Beleuchtung zu erreichen, soll in die Anordnung eine verspiegelte Kugel so eingebaut werden, dass sie jede Werbefläche in genau einem Punkt berührt.
Geben Sie die Koordinaten des Mittelpunktes und des Berührpunktes mit der Werbefläche ABT der Kugel an, und berechnen Sie die Länge des Radius dieser Kugel.

*Ein Oktaeder ist ein Körper, der von acht gleichseitigen Dreiecken begrenzt wird.

	a	b	c	d	e	Punkte
Aufgabe 2	1	3	1.5	3.5	2	**11**

Für alle reellen t und $x \in \mathbb{R}^+$ ist die Funktion f_t gegeben durch $f_t(x) = x - t \cdot \ln(x)$.
K_t ist der Graph von f_t.

a) Weisen Sie nach, dass für alle $t \in \mathbb{R}$ die Graphen K_t genau einen Punkt gemeinsam haben.

b) Untersuchen Sie K_1 auf Hoch-, Tief- und Wendepunkte.
Zeichnen Sie K_1 für $0.1 \leq x \leq 5$ mit $1 \text{ LE} \triangleq 1 \text{ cm}$.

c) Berechnen Sie die Fläche, die durch die erste Winkelhalbierende $\left(y = x\right)$, K_1 und die Gerade mit der Gleichung $x = 3$ begrenzt wird. Das Resultat ist exakt und auf eine Nachkommastelle gerundet anzugeben.

d) d1) Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an K_1 im Punkt $P\left(2|f_1(2)\right)$.
An welcher Stelle schneidet die Tangente die x-Achse?
d2) Bestimmen Sie t so, dass die Tangente an K_t im Punkt $Q\left(1|f_t(1)\right)$ die x-Achse bei $x = 2$ schneidet.

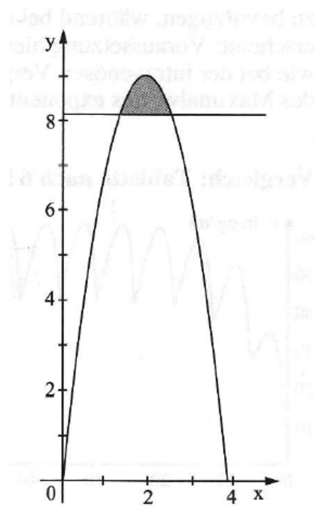
e) Eine ganz rationale Funktion 3. Grades berührt K_1 im Punkt $Q\left(1|1\right)$ und die x-Achse im Punkt $R\left(2|0\right)$. Bestimmen Sie die Gleichung dieser Funktion.

Aufgabe 3	a	b	c	Punkte
	2	2	3	**7**

Bei den olympischen Spielen werden beim Diskuswerfen der Frauen Wurfscheiben der Masse 1 kg verwendet. Die Form solch einer Wurfscheibe (Diskus) lässt sich näherungsweise beschreiben durch ein Parabelstück, das um die x-Achse rotiert (siehe Skizze, alle Angaben in cm). Das Parabelstück liegt im ersten Quadranten und wird beschrieben durch die Gleichung

$$f(x) = -\frac{5}{2}x\left(x - \frac{19}{5}\right).$$

Geben Sie alle Resultate auf eine Nachkommastelle gerundet an.



a) Berechnen Sie den Durchmesser und die maximale Dicke des Diskus.

b) Welche Dichte in $\frac{g}{cm^3}$ hat der Diskus?

c) Um gute Flugeigenschaften und eine hohe Haltbarkeit zu erzielen, entwickelt ein Sportinstitut einen Diskus, bei dem die Kante aus Stahl (siehe Schattierung in der Skizze) und der Rest aus einem anderen Material besteht. Im Querschnitt lässt sich die Stoffgrenze beschreiben durch die Gerade mit der

Gleichung $y = \frac{65}{8}$.

Welcher Prozentanteil der Gesamtmasse der Wurfscheibe hat die Stahlkante, wenn 1 cm^3 Stahl die Masse 7.86 g hat?

Aufgabe 4	a	b	c	d	Punkte
	3	2	2	3	**10**

Alf und Bob üben den Freiwurf beim Basketball. Alf trifft erfahrungsgemäss den Korb mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{4}{7}$; Bob trifft mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{4}{5}$. Es wird angenommen, dass mehrere Würfe unabhängig voneinander erfolgen. Geben Sie alle Resultate auf zwei Nachkommastellen gerundet an.

a) Alf wirft **fünfmal nacheinander**.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:
A : Alf trifft höchstens zweimal.
B : Alf trifft mindestens einmal.

b) Wie oft muss Alf werfen, um den Korb mit der Wahrscheinlichkeit 0.99 mindestens einmal zu treffen?

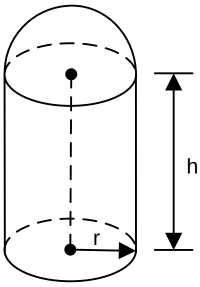
c) Bob übt 20 Freiwürfe.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der er mehr Körbe erzielt, als im langfristigen Mittel zu erwarten sind.

d) Alf und Bob nutzen ihr Training für ein Spiel. Alf beginnt. Es wird abwechselnd geworfen. **Jeder hat höchstens zwei Würfe**. Beim ersten Treffer ist das Spiel beendet.
Zeichnen Sie ein Baumdiagramm für ein Spiel und geben Sie für die Zufallsgrösse X : „Anzahl der Würfe pro Spiel“ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung an.
Zeichnen Sie zu dieser Wahrscheinlichkeitsverteilung ein Stabdiagramm (Anzahl Würfe pro Spiel $\rightarrow$ Wahrscheinlichkeit in Prozent).

	a	b	c	Punkte
Aufgabe 5	3	1	2	**6**

Lösen Sie die drei voneinander unabhängigen Kurzaufgaben.

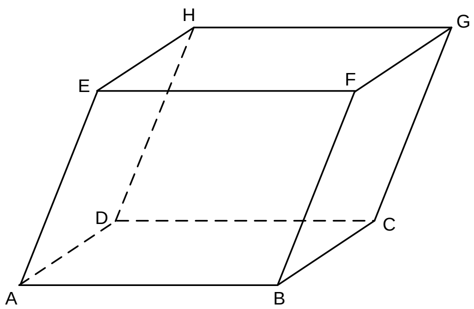
a) Ein Silo soll die Form eines Zylinders mit aufgesetzter Halbkugel erhalten (siehe Abbildung). Das Fassungsvermögen des zylinderförmigen Teils ist mit $V_z = 55\ m^3$ festgelegt. Die gesamte Innenfläche des Silos soll mit Aluminiumblech ausgekleidet werden. Man verspricht sich dadurch, die Nutzungseigenschaften des Silos zu verbessern.
Bei welchem Radius der Grundfläche des Zylinders ist der Blechverbrauch minimal? Runden Sie auf eine Nachkommestelle.



(nicht massstäblich)

b) In einem Kurs mit 12 Jungen und 13 Mädchen werden 5 Freikarten für ein Konzert der Gruppe „Hurts“ verlost. Dazu werden die Namen der 25 Schülerinnen und Schüler auf einen Zettel geschrieben und 5 Zettel zufällig mit einem Griff herausgegriffen.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit (in %) fallen 3 Freikarten auf die Mädchen. Runden Sie auf eine Nachkommastelle.

c) In einem dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystem sind die Koordinaten der Eckpunkte eines schiefen Prismas ABCDEFGH gegeben (siehe Abbildung):
$A(2|1|-1), B(6|4|-2), C(5|6|0), D(1|3|1), E(0|3|5); F(4|6|4), G(3|8|6)$ und $H(-1|5|7)$.
Untersuchen Sie rechnerisch, ob der Punkt $P(3|4|1)$ im Innern des Prismas liegt.



(Abbildung nicht massstäblich)