MATURA 2010
Mathematik
Grundlagenfach

Klassen 6Rb (jeh), 6Re (ale)
7Sb (mus), 6Wa (bim)

Prüfungsdauer:	180 Minuten
Bewertung:	Eine vollständige, ausführlich hergeleitete und sauber dargestellte Lösung einer Aufgabe wird mit der jeweils angegebenen Punktezahl bewertet.
Darstellung:	Für jede Aufgabe ist ein neuer Bogen zu verwenden.
Hilfsmittel:	Formelsammlung DMK, TI 30 und TI-92, TI-92 Plus oder Voyage 200. *Der Einsatz der Hilfsmittel ist klar anzugeben.*

Aufgabe 1 — 12 Punkte (4+2+3+3)

a) Eine ganzrationale Funktion f vom Grad 3 berührt die x-Achse an der Stelle x = 3 und hat den Wendepunkt W(2/2). Bestimme die Funktionsgleichung von f.

Wer Teilaufgabe a) nicht lösen kann, der rechne mit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ weiter.

b) Die y-Achse, die Tangente im Wendepunkt W und der Graph von f begrenzen für $0 \le x \le 2$ ein endliches Flächenstück F. Bestimme den Flächeninhalt von F.

c) Der Graph von f hat im ersten Quadranten einen Hochpunkt H. Die Tangente in H und der Graph von f begrenzen ein endliches Flächenstück, welches um die x-Achse rotiert. Bestimme das Volumen des entstehenden Rotationskörpers.

d) Der Graph einer weiteren ganzrationalen Funktion g vom Grad 2 schneidet den Graphen von f im genannten Wendepunkt W(2/2) rechtwinklig und geht durch den Ursprung. Wie lautet die Funktionsgleichung von g?

Aufgabe 2 — 13 Punkte (2+2+4+3.5+1.5)

Von einem geraden Prisma ABCDEF sind die Grundfläche A(1/-1/2) B(-2/0/3) C(3/1/-2) und eine Seitenkante AD mit D(7/9/10) gegeben.

a) Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene, in der die Grundfläche ABC liegt.

b) Zeige, dass die Seitenkante AD wirklich senkrecht auf der Grundfläche ABC steht.

c) Berechne das Volumen des Prismas und die Koordinaten der zwei weiteren Eckpunkte E und F.

d) Mit der Seitenfläche ABED des Prismas als Grundfläche wird eine gerade Pyramide mit der Höhe $h = \sqrt{22}$ errichtet. Bestimme die Koordinaten der Spitze S.

e) Berechne den Winkel zwischen der Seitenkante AS und der Grundfläche der Pyramide.

Wer Teilaufgabe d) nicht gelöst hat, benütze den Ersatzpunkt $S(3/-3/15.5)$.

Aufgabe 3 — 13 Punkte (2+4.5+6.5)

a) Sieben faire Spielwürfel werden gleichzeitig geworfen. Wie viele verschiedene Wurfbilder gibt es, wenn

a_1) es verschiedenfarbige Würfel sind,

a_2) die Würfel nicht unterscheidbar sind?

b) Stefanie besitzt einen elektronischen Würfel, der wie ein normaler Spielwürfel natürliche Zahlen kleiner gleich 6 als Augenzahlen bestimmt. Die Wahrscheinlichkeit einer geraden Augenzahl ist aber doppelt so gross wie die Wahrscheinlichkeit p für eine ungerade Augenzahl.

b_1) Bestimme die Wahrscheinlichkeitsverteilung für diesen elektronischen Spielwürfel und berechne den Erwartungswert μ für die Augenzahl.

b_2) Stefanie kann ihren elektronischen Würfel auch so programmieren, dass er als Augenzahlen natürliche Zahlen kleiner gleich 12 bestimmt, wobei nun jede Augenzahl mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten kann. Wie viele "Würfe" sind nun mit diesem "Würfel" nötig, damit mit 95-prozentiger Wahrscheinlichkeit mindestens einmal die Augenzahl 8 vorkommt?

c) Es werden gleichzeitig 4 faire Spielwürfel (die Augenzahlen sind natürliche Zahlen kleiner gleich 6, alle Augenzahlen treten mit derselben Wahrscheinlichkeit auf) geworfen. Berechne die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse (Resultate als gekürzte Brüche angeben):

c_1) E_1: 4 gleiche Augenzahlen,

c_2) E_2: genau 3 gleiche Augenzahlen,

c_3) E_3: genau drei Augenzahlen, eine davon zweimal (z.B. 2/2/4/6 oder 2/4/2/6),

c_4) E_4: zwei verschiedene Paare gleicher Augenzahlen (z.B. 2/2/4/4 oder 2/4/4/2),

c_5) E_5: alles verschiedene Augenzahlen.

Aufgabe 4 — 12 Punkte (6.5+1+1+2+1.5)

Die Funktion $f: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ wird durch die Funktionsgleichung $f(x) = 2\sin(x) + \sin(2x)$ definiert.

a) Berechne die Nullstellen, die Koordinaten der lokalen Extremalpunkte sowie die Koordinaten der Wendepunkte für $0 \le x \le 2\pi$ auf 3 Stellen nach dem Komma genau gerundet.

b) Zeichne den Graphen von f für $0 \le x \le 2\pi$.

c) Der Graph von f und die x-Achse begrenzen im Bereich $0 \le x \le \pi$ ein endliches Flächenstück A. Berechne den Flächeninhalt von A.

d) Die Parallele zur y-Achse durch den Punkt $P\left(\frac{\pi}{3} \middle/ 0\right)$ teilt das in Teilaufgabe c) beschriebene Flächenstück A in zwei Teile. Bestimme das Verhältnis der Flächeninhalte der beiden Teile.

e) Bestimme diejenige Stammfunktion F von f, die durch den Punkt $Q\left(\frac{\pi}{4} \middle/ 0\right)$ verläuft.