

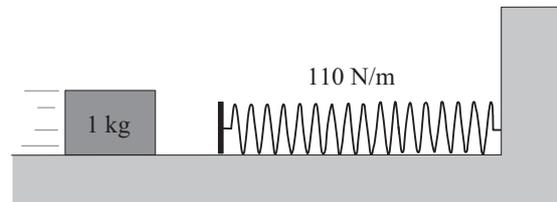
Kantonsschule Luzern

Fach	Schwerpunktfach Physik und Anwendungen der Mathematik	
Prüfende Lehrpersonen	<i>Michael Portmann - Orłowski (michael.portmann@edulu.ch) Christian Ferndrigger, Franz Meier, Philipp Spindler</i>	
Klassen	<i>6Ka, 6La 6Ra</i>	
Prüfungsdatum	<i>2. Juni 2009</i>	
Prüfungsdauer	<i>180 Minuten</i>	
Erlaubte Hilfsmittel	Formelsammlung DMK Taschenrechner Rechner TI-92 / Voyage 200	
Anweisungen zur Lösung der Prüfung	<p>Liebe Maturandinnen und Maturanden,</p> <ul style="list-style-type: none"> • Lösungen sind sauber darzustellen und ausführlich zu dokumentieren. • Bitte löst die Aufgaben 1 – 5 für die Physik sowie die Aufgaben 6 – 8 für die Mathematik auf separate Bögen. • Für 50 Pkt wird die Note 6 erteilt. <p>Wir wünschen viel Glück und viel Erfolg.</p> <p style="text-align: right;">Michael Portmann – Orłowski Christian Ferndrigger Franz Meier Philip Spindler</p>	
Anzahl erreichbarer Punkte	<p>Physik <i>Aufgabe 1: 6 Pkt Aufgabe 2: 6 Pkt Aufgabe 3: 6 Pkt Aufgabe 4: 6 Pkt Aufgabe 5: 6 Pkt</i></p>	<p>Mathematik <i>Aufgabe 6: 10 Pkt Aufgabe 7: 10 Pkt Aufgabe 8: 10 Pkt</i> Total: 60 Pkt</p>
Anzahl Seiten (inkl. Titelblatt)	6	

1. Mechanik

6 Punkte

Ein Block mit einer Masse (1,0 kg) gleitet eine horizontale Fläche mit einer Gleitreibungszahl von 0,30 entlang. Der Block ist mit einer Geschwindigkeit von 1,0 m/s unterwegs, als er frontal auf eine masselose Feder trifft.

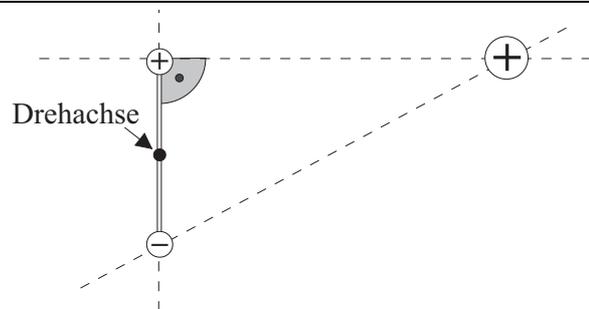


- Wie weit wird die Feder zusammengedrückt, wenn sie eine Federkonstante von 110 N/m hat?
- Welcher Mindestwert der Haftreibungszahl garantiert, dass die Feder in der maximalen Kompressionsposition zusammengedrückt bleibt? Falls Sie a) nicht gelöst haben, verwenden Sie $x = 0,04$ m.
 - Zahlenwert berechnen
 - Alle auf den Block wirkenden Kräfte an dieser Position in einer Skizze aufzeichnen
- Jemand behauptet: „Wenn dieselbe Masse eine schiefe Ebene hochgleiten müsste (mit einer höheren Anfangsgeschwindigkeit, so dass die Feder gleich stark zusammengedrückt würde), so wäre eine kleinere Haftreibungszahl nötig um denselben Stopp zu erreichen wie bei Aufgabe b)“. Entscheiden **und** begründen Sie eindeutig, ob diese Behauptung wahr oder falsch ist.

2. Elektrostatik und Rotation

6 Punkte

An einem Plastikstab (Radius: 0,3 cm, Länge: 17 cm, Masse: 16 g) werden an beiden Enden Kugeln (Radius: 1,5 cm, Masse: 20 g) aus Metall befestigt. In der Mitte des Stabes wird der Stab so gelagert, dass er im Schwerpunkt um die eigene Achse drehen kann. Die eine Kugel wird mit $+ 5,21 \cdot 10^{-8}$ C aufgeladen, die andere Kugel mit $- 5,21 \cdot 10^{-8}$ C.



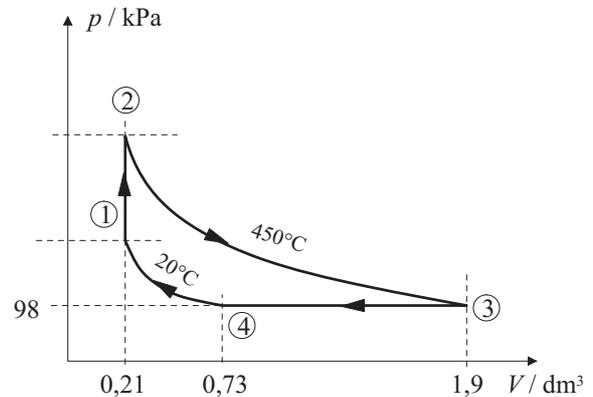
- Wir laden eine weitere Kugel in grosser Entfernung vom Stab positiv auf. Sie trägt eine Ladung von $+ 0,98 \cdot 10^{-3}$ C. Diese Kugel stellen wir in 29,1 cm Entfernung von der positiv geladenen Kugel am Stab entfernt ab.
 - Berechnen Sie die Kräfte, welche auf die beiden Kugeln des Stabes wirken.
 - Zeichnen Sie die Kräfte ins Bild oben ein.
- Berechnen Sie das Drehmoment für die gesamte Anordnung im Zeitpunkt, wenn wir die dritte Kugel neben den Stab hinstellen.
- Franziska hat den Versuch ebenfalls gesehen und behauptet:
 - Wenn beide Kugeln am Stab gleich stark und positiv geladen wären, so würde der Stab nach dem ersten Anstossen mit nahezu konstanter Winkelgeschwindigkeit um die eigene Achse drehen.
 Entscheiden Sie eindeutig, ob diese Behauptung richtig oder falsch ist. *Begründung?*

3. Wärmelehre

6 Punkte

In der Anleitung für einen Stirlingmotor finden wir dieses Diagramm. Es zeigt den idealisierten Kreisprozess, welcher das Argongas im Stirlingmotor durchläuft.

Bei ① wird dem anfänglich 20°C warmen Gas durch die Flamme eines Gasbrenners isochor Wärme zugeführt. Bei ② erreicht das Gas eine Temperatur von 450°C. Von ② nach ③ dehnt sich das Gas isotherm aus, wobei es der Umgebung Wärme entzieht und nach aussen Arbeit liefert. Bis ④ gibt das Gas isobar Wärme an die Umgebung ab. Dann wird das Gas isotherm auf den Anfangszustand ① zusammengedrückt und gibt Wärme ab.



- Berechnen Sie die Masse der eingeschlossenen Argon-Gasmenge.
- Leiten Sie die untenstehende Gleichung für die Arbeit her, welche beim isothermen Ausdehnen des Gases nach aussen geliefert wird.

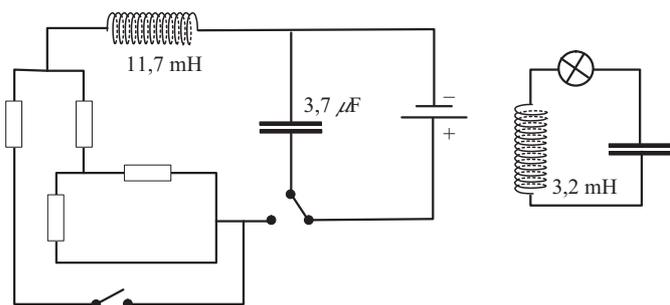
$$W = -nRT \ln\left(\frac{V_3}{V_2}\right)$$

- Berechnen Sie die Arbeit fürs isotherme Ausdehnen des Gases.
Falls Sie a) nicht gelöst haben, verwenden Sie $m = 0,034 \text{ kg}$.

4. Wechselstrom

6 Punkte

Andrea hat den untenstehenden Stromkreis aufgebaut und getestet. Die Widerstände im Bereich links sind alle gleich gross und betragen jeweils 10Ω .



- Andrea klappt den Schalter in der Mitte unten von rechts nach links um und misst die Spannung über dem Kondensator.
 - Erklären Sie **Schritt für Schritt**, was passiert, wenn Andrea den Schalter umklappt.
 - Zeichnen Sie das U_C - t -Diagramm!
- Neben dem abgebildeten Stromkreis hat Andrea eine Spule ($3,2 \text{ mH}$), einen Kondensator und ein Glühlämpchen zusammen gehängt. Am Kondensator kann gedreht werden, so dass sich die Kapazität ändert. Als Andrea am Knopf des Kondensator dreht, beginnt plötzlich das Lämpchen zu leuchten. Welche Kapazität muss der Kondensator aufweisen, damit das Lämpchen zu leuchten beginnt? *Nur berechnen!*

Kantonsschule Luzern

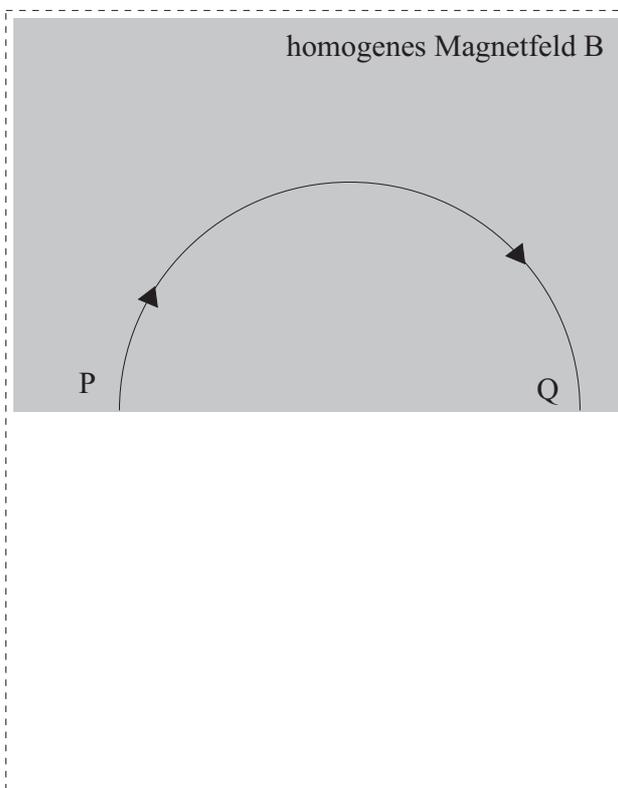
- c) Mit einem zweiten Schalter kann Andrea weitere Widerstände anschliessen. Sie behauptet, dass die bei a) beobachteten Phänomene viel länger dauern, wenn alle Widerstände angeschlossen sind! Entscheiden Sie eindeutig, ob diese Aussage richtig oder falsch ist. *Begründung?*

5. Moderne Physik

6 Punkte

Beim Punkt P treten Elektronen mit einer Geschwindigkeit von $0,998 c$ in ein räumlich begrenztes homogenes Magnetfeld ein. In der Skizze ist die halbkreisförmige Bahn der Elektronen im Magnetfeld dargestellt. Innerhalb der gestrichelten Linie werden die Elektronen erzeugt und beschleunigt.

- a) In der nebenstehenden Skizze fehlt die Anordnung zur Erzeugung und Beschleunigung der Elektronen. Wir müssen das Bild ergänzen. **Übertragen Sie deshalb als erstes die nebenstehende Skizze vom Aufgabenblatt auf Ihr Blatt.**



- Zeichnen und erklären Sie wie die Anordnung zur Erzeugung und Beschleunigung der Elektronen aussieht.
- Zeichnen und erklären Sie, wie das Magnetfeld ausgerichtet ist.

- b) Berechnen Sie ...

- die Masse der Elektronen in Vielfachen der Ruhemasse
- die Beschleunigungsspannung.

6. Differentialgleichungen

10 Punkte

6.1 Gegeben ist die inhomogene Differentialgleichung (DGL) $y' \sin(x) - 2y \cos(x) = x \sin^5(x)$, wobei $0 < x < \pi$ ist.

- Berechnen Sie die Lösung der homogenen DGL $y' \sin(x) - 2y \cos(x) = 0$ mit Separation der Variablen.
- Berechnen Sie eine partikuläre (spezielle) Lösung der inhomogenen DGL mit Variation der Konstanten.
- Berechnen Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL.
- Wie lautet die Lösung der inhomogenen DGL, für die $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{16}$ ist?

Kantonsschule Luzern

6.2 Ein Solarmobil ist bei Anbruch der Nacht noch 70 km von seinem Ziel entfernt. Von diesem Zeitpunkt an ist seine Geschwindigkeit proportional zu seiner Entfernung von diesem Ziel. Stellen Sie eine DGL für die Bewegung des Solarmobils auf.

7. Komplexe Funktion

10 Punkte

Gegeben ist die komplexe Funktion $f: z \rightarrow w = \frac{1}{2} \left[(1-2i)\bar{z} - \frac{1}{5}(1+2i)z \right]$

und die Punktmenge $IM: z\bar{z} + (4+8i)z + (4-8i)\bar{z} + 64 = 0$

- Bestimmen und charakterisieren Sie die Punktmenge IM .
- Bestimmen Sie die Fixpunkte der Funktion f und charakterisieren Sie die geometrischen Eigenschaften der Funktion f . Um was für eine geometrische Abbildung handelt es sich?
- Bestimmen und charakterisieren Sie das Bild IM' von IM .
- Zeichnen Sie IM und IM' in der Gaußschen Zahlenebene.
- Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche A' , die das Bild IM' und die Tangenten vom Nullpunkt aus an IM' begrenzen.

8. Statistischer Test

10 Punkte

Ein Studium – und dann die Lebensstelle! Vor vielen Jahren war das wohl noch so. Tatsache ist jedoch, dass bereits vor 50 Jahren 60% aller 50-jährigen ihre Arbeitsstelle zwei oder mehr Mal gewechselt haben. Wir nehmen an, dass im Jahre 2008 der Prozentsatz noch höher lag.

- Formulieren Sie die Hypothesen.
- Bei einer kleinen Stichprobe haben 15 von 20 50-jährigen angegeben, dass sie ihre Arbeitsstelle zweimal oder mehrmals gewechselt haben. Bestimmen Sie die Testverteilung sowie den Verwerfungsbereich für ein Signifikanzniveau von 5%. Darf man auf Grund der Stichprobe behaupten, die Jobwechselrate habe zugenommen?
- Eine grössere Stichprobe hat ergeben, dass lediglich 65 von 200 50-jährigen ihre Arbeitsstelle nie oder einmal gewechselt haben.
 - Bestimmen Sie die Testverteilung sowie den Verwerfungsbereich für ein Signifikanzniveau von 3%. Darf man auf Grund der nun grösseren Stichprobe annehmen, dass die Jobwechselrate zugenommen hat?
 - Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art, wenn wir dem Bundesamt für Statistik glauben, dass im Jahre 2008 die Jobwechselrate bei 70% lag. Interpretieren Sie den Fehler 2. Art.

Kantonsschule Luzern

Musterlösung

1. Mechanik

a) $E_{\text{kin}} = E_{\text{Feder}} + W_{\text{Gleit}} \Leftrightarrow \frac{m}{2} v^2 = \frac{D}{2} y^2 + F_{\text{Gleit}} \cdot \Delta s \Leftrightarrow \frac{m}{2} v^2 = \frac{D}{2} y^2 + \mu_{\text{Gleit}} \cdot m \cdot g \cdot y$
 \Leftrightarrow quadratische Gleichung lösen: $y = 0,072 \text{ m}$

b) Skizze $\Leftrightarrow F_{\text{Feder}} = F_{\text{Haft}} \Leftrightarrow D \cdot y = \mu_{\text{Haft}} \cdot m \cdot g \Leftrightarrow \mu_{\text{Haft}} = \frac{D \cdot y}{m \cdot g} \Leftrightarrow \mu_{\text{Haft}} = 0,81$

c) Neu entsteht eine Hangabtriebskraft, welche im Kräftegleichgewicht zur Federkraft addiert werden muss. Da gleichzeitig bei der Haftkraft die Normalkraft abhängig von der Hangneigung abnimmt, muss die Haftzahl μ_{Haft} grösser werden. \Leftrightarrow Behauptung falsch

2. Elektrostatik und Rotation

a) Kräfte einzeichnen \Leftrightarrow Abstand nach unten links: $r = \sqrt{29,1^2 + 17^2} = 33,7 \text{ cm}$

$$F_{\text{Coulomb}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} \Leftrightarrow F_{\text{oben}} = 5,42 \text{ V/m}, F_{\text{unten}} = 4,04 \text{ V/m}$$

b) $M = M_1 + M_2 \Leftrightarrow M = F_{\text{oben}} \cdot \frac{l}{2} \cdot \sin \varphi_{\text{oben}} + F_{\text{unten}} \cdot \frac{l}{2} \cdot \sin \varphi_{\text{unten}}$
 $\Leftrightarrow \sin \varphi_{\text{oben}} = 1, \sin \varphi_{\text{unten}} = 0,291 / 0,337 \Leftrightarrow M = 0,757 \text{ Nm}$

c) Da die Abstände zwischen den Ladungen ändern, verändert sich das Drehmoment. Deshalb ist die Winkelbeschleunigung keine konstante Grösse und die Winkelgeschwindigkeit sicher nicht konstant. \Leftrightarrow Behauptung falsch

3. Wärmelehre

a) $pV = \frac{m}{M} RT \Leftrightarrow m = M \frac{pV}{RT} = 1,17 \text{ g}$

b) $dW = -p \cdot V = -nRT \frac{dV}{V} \Leftrightarrow$ von V_2 bis V_3 integrieren $\Leftrightarrow dW = -nRT \ln(V) \Big|_{V_2}^{V_3} \Leftrightarrow$
 einsetzen und umformen mit Hilfe von $\ln(V_3) - \ln(V_2) = \ln\left(\frac{V_3}{V_2}\right) \Leftrightarrow \text{qed}$

c) $W = -nRT \ln\left(\frac{V_3}{V_2}\right) \Leftrightarrow W = -387,86 \text{ J}$

Kantonsschule Luzern

4. Wechselstrom

- a) Kondensator entladen \Leftrightarrow Selbstinduktion in der Spule, da Strom fliesst und ein Magnetfeld entsteht \Leftrightarrow Spannung am Kondensator wird umgepolt und Kondensator laden \Leftrightarrow „schwingende“ Ladungen um Stromkreis \Leftrightarrow an den Widerständen geht Energie verloren \Leftrightarrow gedämpfte Schwingung \Leftrightarrow Skizze

$$b) f_{\text{links}} = f_{\text{rechts}} \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi\sqrt{L_{\text{links}} \cdot C_{\text{links}}}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_{\text{rechts}} \cdot C_{\text{rechts}}}} \Leftrightarrow C_{\text{links}} = C_{\text{rechts}} \frac{L_{\text{rechts}}}{L_{\text{links}}} \Leftrightarrow C_{\text{links}} = 13,53 \mu\text{F}$$

- c) Der zusätzliche Widerstand wird parallel geschaltet, so dass der Gesamtwiderstand abnimmt und deshalb die Dämpfung der Schwingung kleiner wird \Leftrightarrow Behauptung falsch

5. Modernen Physik

- a) Skizze Heizdraht \Leftrightarrow Wenn ein Heizdraht glüht, können die Elektronen aufgrund ihrer hohen thermischen Bewegung den Draht verlassen.

Skizze Kondensatorplatten \Leftrightarrow Die austretenden Elektronen werden fokussiert (negative Platten) und mit der positiv geladenen Platte beschleunigt.

Skizze Magnetfeld \Leftrightarrow Die Lorentzkraft lässt sich mit Hilfe eines Vektorprodukts beschreiben. Bedingt durch die negative Ladung der Elektronen müssen wir statt der rechten Hand die linke Hand „anwenden“. Das Magnetfeld muss dann ins Blatt hinein zeigen.

$$b) m = \gamma \cdot m' = \frac{m'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Leftrightarrow m = 15,81 m'$$

$$E_{\text{ele}} = E_{\text{kin}} \Leftrightarrow e \cdot U = (\gamma - 1)m' \cdot c^2 \Leftrightarrow U = \frac{(\gamma - 1)m' \cdot c^2}{e} \Leftrightarrow U = 7,57 \text{ MV}$$

6. Differentialgleichungen

$$6.1 a) y' = 2 \cot(x) \cdot y \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = 2 \int \cot(x) dx$$

$$\Leftrightarrow \ln y = 2 \ln(\sin(x)) + c_1 = \ln(\sin^2(x)) + c_1 \Leftrightarrow y_h(x) = c \cdot \sin^2(x)$$

$$b) \text{ Ansatz für die partikuläre Lösung: } y_p(x) = c(x) \cdot \sin^2(x)$$

$$\Rightarrow y_p'(x) = c'(x) \cdot \sin^2(x) + c(x) \cdot 2 \sin(x) \cos(x)$$

Einsetzen von y_p und y_p' in die inhomogene DGL:

$$c'(x) \cdot \sin^3(x) + c(x) \cdot 2 \sin^2(x) \cos(x) - 2c(x) \sin^2(x) \cos(x) = x \sin^5(x)$$

$$\Leftrightarrow c'(x) \cdot \sin^3(x) = x \sin^5(x) \Leftrightarrow c'(x) = x \sin^2(x)$$

$$\Leftrightarrow c(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} \sin(x) \cos(x) - \frac{1}{4} \cos^2(x) \quad (\text{Konstante wird hier weggelassen})$$

Kantonsschule Luzern

$$\Leftrightarrow y_p(x) = \left(\frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} \sin(x) \cos(x) - \frac{1}{4} \cos^2(x) \right) \sin^2(x)$$

c) $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \left(\frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} \sin(x) \cos(x) - \frac{1}{4} \cos^2(x) + c \right) \sin^2(x)$

d) $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{8} \cdot 1 \cdot 0 - \frac{1}{4} \cdot 0 + c \right) \cdot 1 = \frac{\pi^2}{16} \Rightarrow c = 0$

$$\Rightarrow y(x) = \left(\frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} \sin(x) \cos(x) - \frac{1}{4} \cos^2(x) \right) \sin^2(x)$$

6.2 $x(t)$: zurückgelegte Strecke in km zur Zeit t (in Std.)
DGL: $x'(t) = \lambda(70 - x(t))$

7. Komplexe Funktion

a) $z\bar{z} + (4+8i)z + (4-8i)\bar{z} + 64 = 0 \Rightarrow x^2 + 8x + y^2 - 16y + 64 = 0$

$$\Rightarrow (x+4)^2 + (y-8)^2 = 16 \quad (1); \text{ Kreis } k \text{ mit } M(-4+8i) \text{ und } r = 4$$

b) $f(z) = z \Rightarrow$ Fixpunktgerade $y = -\frac{3}{4}x$.

Abbildungsgleichung von $f: z = x+yi \rightarrow w = u+vi$ mit

$$\begin{cases} u = \frac{2}{5}x - \frac{4}{5}y \\ v = -\frac{6}{5}x - \frac{3}{5}y \end{cases} \quad (2) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{6}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix};$$

$\det(M) = -\frac{6}{5} \neq 0$ und f hat eine Fixpunktgerade $\Rightarrow f$ ist perspektive Affinität

c) $IM' = f(IM)$ (oder mit Eigenwerten von $M: \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1.2$)

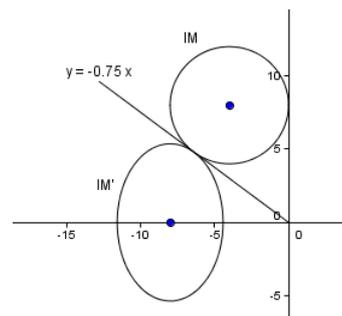
Löse (2) nach x und y auf \Rightarrow Abbildungsgleichung von f^{-1}

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}u - \frac{2}{3}v \\ y = -u - \frac{1}{3}v \end{cases} \quad \text{eingesetzt in (1) (mit quadratischer Ergänzung) } IM':$$

$$\frac{(u+8)^2}{64} + \frac{v^2}{144} = 1$$

Ellipse mit $M(-8)$ und den Halbachsen

$$a = \frac{8\sqrt{5}}{5}, \quad b = \frac{12\sqrt{5}}{5}$$



Kantonsschule Luzern

$$d) A' = |\text{Det}(M)| A = 2 |\text{Det}(M)| (A_{\text{Dreieck}} - A_{\text{Kreissektor}}) = 2 \cdot \frac{6}{5} \left(16 - \frac{16\pi \cdot 63.43}{360} \right) \approx 17.14$$

8. Statistischer Test

a) Hypothesen $H_0: p_1 = p_0 = 0.6$ **Nullhypothese** möchte man verwerfen. Die Jobwechselrate ist im Jahre 2008 gleich gross, wie vor 50 Jahren.

$H_1: p_1 > p_0 = 0.6$ **Alternativhypothese** (Arbeitshypothese) möchte man annehmen. Die Jobwechselrate hat zugenommen gegenüber früher.

b) $p(T=x) = p(x \text{ von } 20 \text{ haben Job } 2 \text{ oder mehr Mal gewechselt})$

$$= \binom{20}{x} p^x (1-p)^{20-x} = \binom{20}{x} 0.6^x 0.4^{20-x} \quad x = 0, 1, 2, \dots, 20 \quad \text{Binomialverteilung}$$

$$p(T \geq 16) = \sum_{x=16}^{20} \binom{20}{x} 0.6^x 0.4^{20-x} \approx 0.051$$

=> Signifikanzgrenze $T_{0.95} = 17$, so dass **Verwerfungsbereich**: $T \geq 17$

=> für $T = 15 < T_{0.95} = 17$ => Die Jobwechselrate ist nicht signifikant grösser als 60%.

c) i) $p(T=x) = p(x \text{ von } 200 \text{ haben Job } 2 \text{ oder mehr Mal gewechselt})$

$$= \binom{200}{x} p^x (1-p)^{200-x} = \binom{200}{x} 0.6^x 0.4^{200-x} \quad x = 0, 1, 2, \dots, 200 \quad \text{Binomialverteilung}$$

$$p(T = x \geq 133) = \sum_{x=133}^{200} \binom{200}{x} 0.6^x 0.4^{200-x} \approx 0.035$$

$$p(T = x \geq 134) = \sum_{x=134}^{200} \binom{200}{x} 0.6^x 0.4^{200-x} \approx 0.025$$

=> Signifikanzgrenze $T_{0.97} = 134$, so dass **Verwerfungsbereich**: $T \geq 134$

=> Für $T = 135 > T_{0.97} = 134$ => Die Jobwechselrate ist signifikant grösser als 60%.

$$ii) p_1 = 0.7 \Rightarrow p(T = x < 134) = \sum_{x=0}^{133} \binom{200}{x} 0.7^x 0.3^{200-x} \approx 0.158$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass man die Nullhypothese fälschlicherweise nicht verwirft und annimmt, dass die Jobwechselrate im 2008 nicht grösser als 60% ist, ist 15.8%.