KANTON LUZERN — Kantonsschule Luzern

Obergymnasium

MATURA 2009
Mathematik
Grundlagenfach

Klassen 6Ra (spp), 6Ka (mef), 6La (mef)

Datum: 29. Mai 2009
Zeit: 180 Minuten

Fünf Aufgaben
Zu jeder Aufgabe gehört ein ausführlicher und nachvollziehbarer Lösungsweg!
Es wird Wert auf eine saubere und übersichtliche Darstellung gelegt. Bei jeder Aufgabe ist die maximale Punktzahl angeschrieben.
Die Note 6 wird für 40 von 45 Punkten erteilt.

Erlaubte Hilfsmittel
Formelsammlung „Formeln und Tafeln", von der Schule abgegeben.
Taschenrechner ohne Handbücher: TI-92, TI-92Plus oder TI voyage 200, TI-30

- Der Gebrauch der Hilfsmittel muss klar dokumentiert werden.
- Jede Aufgabe ist auf einen neuen Bogen zu schreiben.
- Jeder Bogen ist mit persönlicher Nummer, Name und Klasse zu beschriften.

Aufgabe 1 — 9 Punkte

In einem kartesischen Koordinatensystem ist eine Pyramide $ABCDS$ mit der Grundfläche durch die Eckpunkte $A(20/0/12)$, $B(10/20/-8)$, $C(-10/0/-18)$, $D(0/-20/2)$ und der Spitze $S(-7/6/9)$ gegeben. Von der Gerade g durch den Punkt D ist zudem noch der Punkt $P(23/66/9)$ gegeben.

a) Zeigen Sie, dass $ABCDS$ eine gerade quadratische Pyramide ist.

b) Berechnen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E, die durch die drei Punkte A, B und S definiert wird.

c) Bestimmen Sie das Volumen der Pyramide $ABCDS$.

d) Berechnen Sie den Durchstosspunkt der Geraden g durch die Ebene E.

Aufgabe 2 — 11 Punkte

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = -\frac{1}{16}x^2 + 8$.

$P(u/v)$ ist ein Punkt auf dem Graphen von f.

a) Bestimmen Sie P im 1. Quadranten so, dass im Dreieck ABP mit den Ecken $A(-6/0)$ und $B(u/0)$ die Summe der Kathetenlängen maximal ist.

b) Rotiert das Dreieck ABP um die x-Achse, so entsteht ein Rotationskegel. Für welchen Punkt P im 1. Quadranten ist der Rauminhalt des Rotationskegels maximal?

Zusätzlich sei die Funktion g mit der Gleichung $g(x) = \sqrt{2x}$ gegeben.

c) Berechnen Sie den Winkel, unter dem sich die Graphen von f und g schneiden.

d) Das Flächenstück im 1. Quadranten, das durch die Graphen von f und g sowie die y-Achse begrenzt ist, rotiert um die y-Achse. Berechnen Sie den Rauminhalt dieses Rotationskörpers.

Aufgabe 3 — 12 Punkte

Gegeben ist die Kurvenschar f_a mit $f_a(x) = \dfrac{ax - x^2}{x+1}$ und $a > 0$. Der Graph von f_a definiert eine Kurve k_a.

a) Bestimmen Sie den Parameter a so, dass die Kurve k_a bei $x = 1$ ein Maximum hat.

b) Untersuchen Sie die Kurve k_a für den Fall $a = 3$ auf Nullstellen, Pole, Extrema, Wendepunkte sowie Asymptoten und zeichnen Sie die Kurve unter Verwendung der gefundenen Resultate. (Einheit: 1 Häuschen)

c) Auf welcher Kurve liegen die Hochpunkte H_a der Kurven von f_a?

Aufgabe 4 — 9 Punkte

Rudern ist ein beliebter Volkssport im Herzogtum Weiden. Einmal im Monat tragen die Dörfer Weissenfurt und Braunenklamm ein Wettrudern auf neutralem Terrain aus.

Weissenfurt gewinnt einen Wettkampf mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{37}{48}$, Braunenklamm gewinnt mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{11}{48}$.

a1) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Weissenfurt von den 12 Wettkämpfen des nächsten Jahres mindestens 9 gewinnen kann?

a2) Wie viele Wettkämpfe müssen die zwei Dörfer mindestens austragen, damit Braunenklamm mit 99%-iger Wahrscheinlichkeit mindestens ein Rennen für sich entscheiden kann?

Auch die Städte Trallop und Donnerbach führen monatlich ein Wettrudern gegeneinander durch: einmal vor Trallop, das nächste Mal vor Donnerbach, dann wieder vor Trallop usw. Trallop gewinnt seine Heimrennen mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.73. Donnerbach vermag seine Heimrennen mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.58 für sich zu entscheiden.

b1) Die zwei Städte tragen vier Rennen aus: zwei vor Trallop, zwei vor Donnerbach. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Trallop genau ein Rennen gewinnt?

Ein grosser Trumpf Donnerbachs ist der „Bärenstarke Alrik“, ein besonders kräftiger und schöner Bursche, der nur bei Heimrennen antritt. Sitzt er mit im Boot, erhöht sich die Wahrscheinlichkeit für einen Heimsieg Donnerbachs (von 0.58) auf 0.84. Da Alrik jedoch recht häufig verletzt ist, kann er nur bei 45% aller Heimrennen mitrudern.

b2) Für die Einwohner Donnerbachs ist es ein freudiges Ereignis, wenn Donnerbach in einem Heimrennen gewinnt oder wenn Alrik mitrudert. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis?

Gewinnt Donnerbach ein Heimrennen, kann der einzige Wirt von Donnerbach mit Einnahmen in der Höhe von 25 Dukaten rechnen. Verliert Donnerbach trotz Alriks Mithilfe, feiert zumindest die weibliche Bevölkerung (15 Dukaten Gewinn). Bei einer Niederlage Donnerbachs ohne Alrik geht sogar Mobiliar in die Brüche und es resultiert ein Verlust von 45 Dukaten.

b3) Ist es für den Wirt finanziell rentabel, an Renntagen sein Gasthaus zu öffnen?

Aufgabe 5 — 4 Punkte

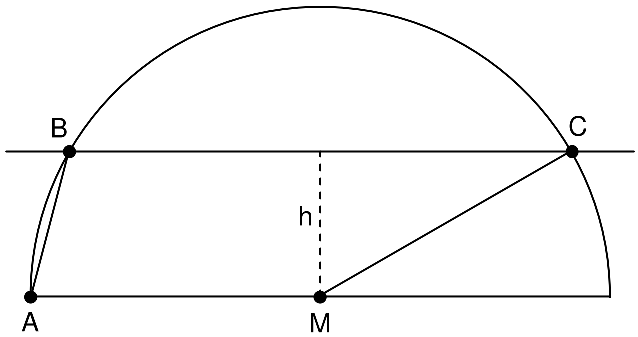
Von den folgenden zwei Kurzaufgaben wird die am besten gelöste Kurzaufgabe berücksichtigt. Beide Kurzaufgaben geben maximal je 4 Punkte.

5.1.
In der unendlichen geometrischen Reihe

$$s = \sin(x) + y\sin(x) + y^2\sin(x) + y^3\sin(x) + ...$$

stehen x und y für die Koordinaten eines Punktes P im xy-Koordinatensystem. Auf welcher Kurve liegen alle solchen Punkte P, für die $s=1$ ist? Erwartet wird eine Kurvengleichung und eine Figur.

5.2.



In einem Halbkreis mit Mittelpunkt M und Radius $r=1$ soll ein Viereck nach folgenden Regeln eingeschrieben werden (siehe Bild):

- Der Radius $\overline{AM}$ auf der Grundlinie des Halbkreises ist eine Seite des Vierecks.
- Die beiden anderen Ecken B und C sind die Schnittpunkte des Halbkreises mit einer zu AM parallelen Geraden.

In welchem Abstand h zur Grundlinie AM muss man die parallele Gerade wählen, damit das Viereck $ABCM$ einen möglichst grossen Flächeninhalt besitzt?