

Obergymnasium

Klassen 6Ra (hoe), 6Rb (mef), 6Kb(mef)

Zeit: 180 Minuten

Es werden nur die **vier** am besten gelösten Aufgaben berücksichtigt. Jede Aufgabe wird mit maximal 10 Punkten bewertet. Vier vollständige, ausführlich hergeleitete Lösungen werden mit der Note 6 bewertet.

Hilfsmittel: Formelsammlung DMK und Voyage 200 oder TI-92

Der Einsatz der Hilfsmittel ist klar anzugeben.

Aufgabe 1

Gegeben sind die Punkte $A(5/10/-5)$, $B(-16/7/-5)$, die Ebene $\alpha: 3x + 4y - 30 = 0$ und die Gerade

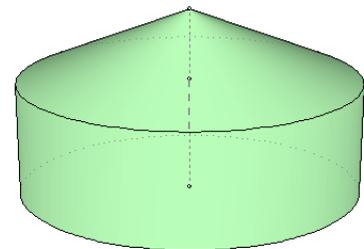
$$g: \vec{r} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

- Bestimme auf der Geraden g die Ecke C des Dreiecks ABC so, dass es gleichschenkelig mit der Basis AB ist und zeige dann, dass es gleichseitig ist.
- Bestimme die Koordinatenform der Ebene ABC .
- Die Spitze D der geraden Pyramide $ABCD$ liegt in der Ebene α . Bestimme D und das Volumen der Pyramide. Kann der Punkt D in c) nicht bestimmt werden, verwende man für die Aufgaben c) und d) den Punkt $D^*(-4/-2/-5)$.
- Bestimme den Neigungswinkel der Geraden $k(DA)$ zur Ebene $E(ABC)$.
- Welche spezielle Lage hat die Ebene α ? Bestimme die Schnittgerade der Ebene α und E .

Aufgabe 2

Jurte von Dschingis Khan

Eine mongolische Jurte besteht aus einem Zylinder und einem kegelförmigen Dach. Aus Erfahrung weiss man, dass eine Jurte am dichtesten ist (d.h. bei Unwetter dringt am wenigsten Wasser oder Schnee in die Jurte), wenn das Verhältnis der Dachhöhe zum Radius der Jurte $5 : 12$ ist.



Die Jurte von Dschingis Khan soll riesig gewesen sein. Sie fasste etwa $1392\pi \text{ m}^3$. Welche Abmessungen hatte die Jurte, wenn die Fläche, die mit Planen bedeckt werden musste, minimal sein sollte.

Aufgabe 3

Gegeben ist für jedes $a > 0$ die Funktion $y = f_a(x) = (a - e^{-2x})^2$, die je eine Kurve definiert.

- Untersuche $f_a(x)$ für $a = 1$ auf Nullstellen, Extremas, Wendepunkte mit den Wendetangenten und skizziere die Kurve. (Einheit: 5 Häuschen)
- Bestimme allgemein den Wendepunkt W_a der Kurve von f_a . Auf welcher Kurve liegen die Wendepunkte der Kurven von f_a ?
- Die Kurve von $y = f_1(x)$ und die Geraden $y = 1$ sowie $x = 0$ begrenzen eine uneigentliche, ins Unendliche reichende Fläche. Diese Fläche lässt man um die Gerade $y = 1$ rotieren. Wie gross ist das Volumen des erzeugten Rotationskörpers?

Aufgabe 4

Zwei Verteiler M und C bieten von einem Haushaltgerät je ein Markenprodukt A und ein Billig - produkt B an. Die Qualitätsuntersuchung einer Konsumentenorganisation ergab die folgenden Wahr- scheinlichkeiten, dass ein verkauftees Gerät mangelhaft ist:

	Markenprodukt A P(mangelhaft)	Billigprodukt B P(mangelhaft)
Verteiler M	0.1	0.2
Verteiler C	0.06	0.25

- Für eine Sammelbestellung einer Hausverwaltung werden vom Verteiler C zufällig 12 Billig- produkte ausgewählt. Bestimme die Wahrscheinlichkeiten für die Anzahl mangelhafter Geräte in der Bestellung. Zeichne eine saubere Verteilung und bestimme den Erwartungswert für die Anzahl mangelhafter Geräte in der Bestellung.
- Vom Verteiler C hat man in einem Wohnblock mit 30 Wohnungen 10 Billigprodukte und 20 Markenprodukte eingebaut. Für eine Kontrolle wählt man zufällig eine Wohnung aus und kontrol- liert das Gerät. Es ist mangelhaft. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das Gerät ein Marken- produkt?
- Ein Grosskunde hat bei Aktionen vom Verteiler M 35 und vom Verteiler C 60 Markenprodukte an Lager gekauft. Für einen Auftrag braucht er 11 Geräte, die er zufällig auswählt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass er mindestens ein Gerät vom Verteiler C auswählt und wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass er höchstens 4 Geräte von Verteiler M auswählt?

Aufgabe 5

Von den drei folgenden unabhängigen Kurzaufgaben werden nur die **zwei** am besten gelösten Kurz- aufgaben mit maximal je 5 Punkten für die Punktzahl der Aufgabe berücksichtigt.

- Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{2x+3}$

Bestimme die 1.,2.,3.,4.,5. Ableitung von f . Welche Vermutung kann man für die n -te Ableitung von f aufstellen? Beweise die Vermutung mit vollständiger Induktion.

- Bestimme die Parametergleichung (Vektorgleichung) der Minimaltransversalen der Geraden g und h .

$$g: \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad h: \vec{r}(s) = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

- Ein Autoimporteur muss am Ende eines Jahres noch 20 Neuwagen in 4 Vertragsgaragen absetzen. Die Garage A kann mindestens 4, die Garage B mindestens 3, die Garage C mindestens 2 und die Garage D mindestens 1 Auto übernehmen, weil dafür schon Bestellungen vorliegen.
 - Auf wieviele Arten können die Autos auf die 4 Garagen verteilt werden?
 - Auf wieviele Arten können die Autos auf die 4 Garagen verteilt werden, wenn die Garage D mindestens 1 aber höchstens 3 Autos übernimmt?