KANTON LUZERN Kantonsschule Luzern

MATURA 2008
Mathematik
Grundlagenfach

Obergymnasium

Klassen 7Sa (mus), 6Wa (hep)
6Rd (fil), 6La (obr)

Zeit: 180 Minuten

Zu jeder Aufgabe gehört ein ausführlicher Lösungsweg! Es wird Wert auf eine saubere und übersichtliche Darstellung gelegt. Bei jeder Aufgabe ist die maximal erreichbare Punktzahl angeschrieben. Für die Note 6 müssen 41 von 49 Punkten erreicht werden.

Erlaubte Hilfsmittel:
Formelsammlung „Formeln und Tafeln“
Taschenrechner ohne Handbücher: TI-92, TI-92 Plus, TI voyage 200, TI-30
Der Gebrauch der Hilfsmittel muss klar dokumentiert werden.

☞ **Jede Aufgabe ist auf einen neuen Bogen zu schreiben.**
☞ **Jeder Bogen ist mit persönlicher Nummer, Name und Klasse zu beschriften.**

Aufgabe 1	**13 Punkte**

Die Ebene E schneidet aus dem Würfel mit der Kantenlänge 6 [Längeneinheiten] das skizzierte Trapez ABCD heraus. Dabei ist A(6/0/3) gegeben. Die Koordinaten aller anderen benötigten Punkte sind der Skizze zu entnehmen.

Bestimme

a. eine Koordinatengleichung der Ebene E.

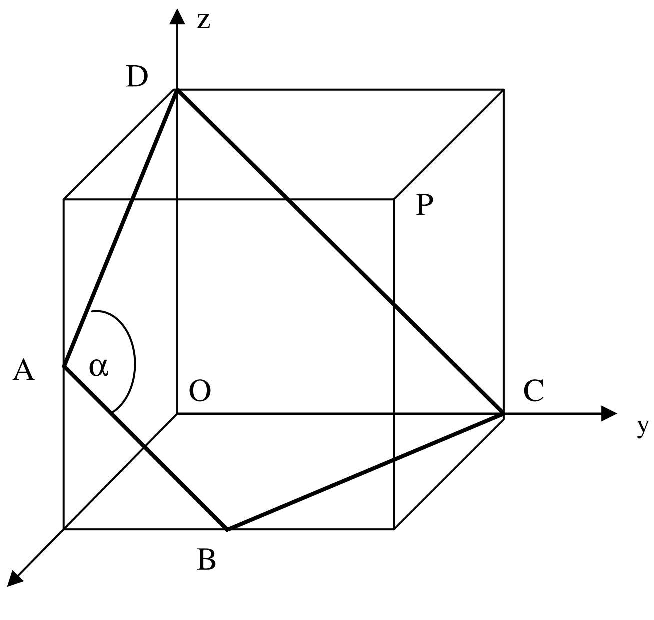
b. den Durchstosspunkt S der Würfeldiagonalen OP mit E.

c. den Winkel $\alpha = \sphericalangle(\mathrm{DAB})$ im Trapez ABCD.

d. den Abstand d des Punktes P von der Ebene E.

e. Beweise, dass das Trapez ABCD gleichschenklig ist.

f. Berechne die Fläche des Trapezes ABCD.



Aufgabe 2	**14 Punkte**

Gegeben ist die Funktion $f(x) = e^{-x}\left(x^2 - x - 2\right)$.

a. Führe eine vollständige Funktionsuntersuchung für f(x) durch, indem du die Nullstellen, Extrema, Wendepunkte, Symmetrien und Asymptoten bestimmst und den Graphen zeichnest.

b. Berechne den Flächeninhalt der nach rechts unbeschränkten Fläche, welche vom Graphen von f(x) und von der x-Achse begrenzt wird.

c. Die beschränkte Fläche, die vom Graphen von f(x) und der x-Achse eingeschlossen wird, rotiert um die x-Achse. Berechne das Volumen des Rotationskörpers.

d. Die Funktion g(x) ist eine ganzrationale Funktion 3. Grades. Der Graph der Funktion g(x) berührt den Graphen der Funktion f(x) im Punkt P(0/-2). Die Tangente im Tiefpunkt von g(x) schneidet den Graphen von g(x) in einem zweiten Punkt P(-1/-4). Bestimme die Funktionsgleichung von g(x).

Aufgabe 3	**12 Punkte**

Gegeben sind die Funktionen $f_k(x) = -\frac{1}{9k}x^3 + kx$ und $g_k(x) = \frac{k}{9}x^3 - \frac{1}{k}x$ mit $k > 0$.

a. Sei k = 3. Bestimme die Wendetangente des Graphen der Funktion $g_3(x)$.

b. Bestimme den Schnittwinkel φ der Graphen von $f_k(x)$ und $g_k(x)$ im Ursprung.

c. Die Parallelen zu den Koordinatenachsen durch den Hochpunkt des Graphen der Funktion $f_k(x)$ begrenzen zusammen mit den Koordinatenachsen ein Rechteck, das vom Graphen der Funktion $f_k(x)$ in zwei Teilflächen zerlegt wird. Berechne diese beiden Teilflächen und bestimme das Verhältnis ihrer Flächeninhalte.

d. Die Graphen von $f_k(x)$ und $g_k(x)$ schliessen für $x \geq 0$ eine Fläche ein. Für welchen Wert von k wird dieser Flächeninhalt minimal, und wie gross ist dieser minimale Flächeninhalt?

Aufgabe 4	**10 Punkte**

In einem Reisebüro buchen erfahrungsgemäss 25% aller Kunden eine Überfahrt nach Dänemark.

a. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gibt es bei 200 Buchungen genau 50 Überfahrten nach Dänemark?

b. Wie viele Buchungen müssen mindestens vorgenommen werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95% mindestens eine Überfahrt nach Dänemark dabei ist?

c. Auf der Fähre hat ein Reiseunternehmen Prospekte für eine Bustour aufgelegt. Erfahrungsgemäss lesen 65% der Passagiere den Prospekt. 30% der Leser buchen die Bustour spontan, die restlichen Leser buchen die Bustour mit einer Wahrscheinlichkeit von 40% später. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein auf der Fähre zufällig ausgewählter Kunde eine Bustour bucht?

d. Volljährige Passagiere, die am Tag der Überfahrt Geburtstag haben, werden vom Kapitän zu einem Glas Champagner eingeladen. An wie vielen Tagen des Jahres kann der Kapitän von jeweils 1000 volljährigen Passagieren mit

   i. keiner Einladung,

   ii. mehr als 4 Einladungen rechnen?

   Voraussetzungen:
   Ein Jahr hat 365 Tage. Jeder Jahrestag ist als Geburtstag gleichwahrscheinlich.