

Obergymnasium

Klassen 6Kb, 6Ra (spp), 6Rb (hee), 6Rc (jeh)

Zeit: 180 Minuten

Es werden nur die vier am besten gelösten Aufgaben berücksichtigt. Jede Aufgabe wird mit maximal 10 Punkten bewertet. Vier vollständige, ausführlich hergeleitete Lösungen werden mit der Note 6 bewertet.

Hilfsmittel: Formelsammlung DMK
Voyage 200 (oder TI-92) und TI-30

Der Einsatz der Hilfsmittel ist klar anzugeben.

Aufgabe 1

Gegeben sind die fünf Punkte $A(-3/1/-3)$, $B(0/-1/-6)$, $C(1/1/-7)$, $P(6/-1/0)$ und $Q(1/-1/-5)$.

- Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene ε , welche durch die drei Punkte A, B und C definiert wird. In welcher speziellen Lage ist ε ?
- Die Gerade g ist die Gerade durch die beiden Punkte P und Q. Bestimme den Durchstosspunkt von g mit ε .
- Zeige, dass für jeden Punkt R der Geraden

$$h: \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ -3 \end{pmatrix}$$

das Dreieck ABR (mit der Hypotenuse \overline{AR}) rechtwinklig ist.

- Kann man $R \in h$ so wählen, dass das Dreieck ABR sogar auch gleichschenkelig wird?
- Bestimme einen Punkt D und alle möglichen Punkte E so, dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:
 - $D \in h$
 - $D \in \varepsilon$
 - $E \in g = (PQ)$
 - Die Pyramide ABDE hat das Volumen 374.

Aufgabe 2

Gegeben sind die beiden Funktionen

$$f: x \mapsto y = \frac{1}{4}x^2 - 4 \text{ und } g: x \mapsto y = \frac{16}{x^2} - 1.$$

- Zeichne beide Graphen für $-4 \leq x \leq +4$ in dasselbe Koordinatensystem (Einheit: 2 Häuschen).
- Die beiden Graphen und die Gerade $y=8$ begrenzen ein endliches Flächenstück F. Berechne den Flächeninhalt von F.
- Unter welchem Winkel schneiden sich die Graphen der beiden Funktionen f und g?
- Das in Teilaufgabe b) beschriebene Flächenstück rotiert um die y-Achse und definiert damit einen Rotationskörper. Bestimme das Volumen des Körpers.
Der Körper hat die Form einer Vase. Diese wird mit Wasser aufgefüllt. In welcher Höhe enthält sie $\frac{3}{4}$ des Gesamtvolumens?

Obergymnasium

Klassen 6Kb, 6Ra (spp), 6Rb (hee), 6Rc (jeh)

Aufgabe 3

Gegeben ist die Kurvenschar f_a mit $f_a(x) = \frac{a-1}{3}x^3 - a \cdot x$ und $a \in \mathbb{R} \setminus [0,1]$.

- a) Zeichne die Graphen von f_a für $a = 2$ und $a = -2$ in dasselbe Koordinatensystem.
(Einheit: 4 Häuschen)
Bestimme die Koordinaten der Schnittpunkte dieser beiden Graphen.
- b) Bestimme die Nullstellen, Lage und Art der Extrema sowie die Wendepunkte von f_a in Abhängigkeit von a . Untersuche das Symmetrieverhalten (punktsymmetrisch bezüglich Ursprung, achsensymmetrisch bezüglich y -Achse).
- c) Berechne den Flächeninhalt $F(a)$, den der Graph von f_a für $a > 1$ mit der x -Achse im zweiten Quadranten einschliesst. Für welchen Wert von a wird $F(a)$ minimal?
- d) Beweise, dass sich zwei verschiedene Kurven aus der Kurvenschar stets in denselben Punkten schneiden.

Aufgabe 4

In der Oberstufe eines Gymnasiums wird das Rauchverhalten der Schülerschaft untersucht. Aus Erfahrung weiß man, dass der Raucheranteil an Schulen 40 % beträgt.

- a) Fünf Schüler betreten nacheinander das Sekretariat. Bestimme die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
 - a₁) A: "Unter ihnen gibt es mindestens einen Raucher"
 - a₂) B: "Es befinden sich höchstens zwei Raucher darunter"
- b) Wie viele Schüler muss man mindestens befragen, um mit mehr als 95%iger Wahrscheinlichkeit mindestens einen Raucher unter ihnen zu finden?
- c) In einer Seminararbeit entwickeln die Schüler Nina, Constanze und Tino ein Verfahren "NiCoTin", das Raucher an der Atemluft erkennt. "NiCoTin" erkennt einen Raucher mit 98%iger Wahrscheinlichkeit. Leider werden auch 5% der Nichtraucher bei diesem Verfahren als Raucher eingestuft.
 - c₁) Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Schüler durch das Verfahren "NiCoTin" als Raucher eingestuft wird.
 - c₂) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein durch "NiCoTin" als Nichtraucher eingestuftes Schüler in Wirklichkeit Raucher ist?
- d) Die Schulleitung hat eine Kommission von vier Personen gebildet, die sich mit der Frage eines Rauchverbotes am Gymnasium befassen soll. Dabei wurden aus den 20 Lehrern und den insgesamt 120 Schülern der Oberstufe je zwei Personen zufällig ausgewählt. Leider hat sich herausgestellt, dass alle vier Kommissionsmitglieder Raucher sind. Wie gross ist der Anteil der Raucher unter den Lehrern, wenn die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis etwa bei 3 % liegt?

Aufgabe 5

Löse die drei voneinander unabhängigen Kurzaufgaben:

a) Bestimme die Summe aller 7-stelligen Zahlen, die sich mit den Ziffern 2, 4, 6 und 8 bilden lassen.

b) Bestimme den Wertebereich $W(f)$ der Funktion $f(x) = \frac{x^3}{1+x^4}$

c) Eine Urne enthalte fünf blaue und eine gelbe Kugel. Für das Spiel "Ziehen und Ersetzen" wird folgende Regel vereinbart:

Es wird jeweils genau eine Kugel gezogen. Ist die gezogene Kugel gelb, so wird sie in die Urne zurückgelegt, ist sie dagegen blau, wird sie beiseite gelegt und in der Urne durch eine gelbe ersetzt.

Auf einem Rummelplatz wird an einem Stand das Spiel "Ziehen und Ersetzen" als Glücksspiel angeboten. Nach einem Einsatz von x Franken darf der Spieler jetzt dreimal ziehen.

Er erhält vom Standbesitzer bei

- drei gezogenen gelben Kugeln 50 Franken, bei
- zwei gezogenen gelben Kugeln 5 Franken und bei
- einer gezogenen gelben Kugel 2 Franken

ausbezahlt.

Wie gross muss der Einsatz x des Spieler mindestens sein, damit dieses Glücksspiel dem Standbesitzer langfristig Gewinn bringt?