Kantonsschule Luzern – Matura 2007

Mathematik Grundlagenfach

Klassen 6Kc, 6Ld, 6Re, 6Wb, 7Sa

Franz Xaver Barmet (baf)
Peter Büchel (bup)
Pierre-Dominique Hool (hop)
Stefan Müller (mus)

Prüfungsdauer :	*180 Minuten*
Formelsammlung :	*Formeln und Tafeln, Verlag Orell-Füssli*
Taschenrechner :	*TI-Voyage-200 oder TI-92-plus, ohne Handbuch, zusätzlich ein Rechner vom Typ TI-30*
Darstellung :	*Die Lösungsschritte müssen nachvollziehbar sein. Aufgaben sauber und übersichtlich darstellen. Bitte für jede Aufgabe einen neuen Bogen verwenden.*
Punktzahl :	*4 Aufgaben ergeben insgesamt 43 Punkte. Für die Note 6 braucht es 38 Punkte*

Aufgabe 1 Analysis (12 Punkte)

Gegeben sind die drei Funktionen f, g und h wie folgt:

$$f : y = f(x) = \frac{1}{16}x^3 - x + 5$$

$$g : y = g(x) = -\frac{1}{16}(x-8)^3 + x - 3$$

$$h : y = h(x) = \frac{1}{4}(x-4)^2 + 1$$

Die Grafen von f, g und h begrenzen eine Fläche F.

a) Skizzieren Sie diese Fläche und bestimmen Sie aus der Figur die Gleichung der Symmetrieachse.
Welchen Inhalt hat F ?

b) Die Fläche F rotiert um die x-Achse.
Berechnen Sie das Volumen des so entstandenen Rotationskörpers.

c) Unter welchem Winkel schneiden sich die Grafen von f und g ?

d) Die Normale im Punkt $P\left(3 \middle| h(3)\right)$ zerlegt die Fläche F in eine linke und eine rechte Teilfläche.
Welchen Anteil in Prozenten hat die rechte Teilfläche am Inhalt der Gesamtfläche F ?

Aufgabe 2	Analysis	(10 Punkte)

Gegeben sind die beiden Funktionen $f(x) = e^x$ und $g(x) = \sqrt{k \cdot x + 1}$, $k \in \mathbb{R}$

a) Bestimmen Sie k so, dass sich die Grafen der beiden Funktionen auf der y-Achse berühren.

Fahren Sie jetzt weiter mit $k = 2$

b) Die Grafen der beiden Funktionen und die x-Achse begrenzen im zweiten Quadranten eine Fläche, die ins Unendliche reicht.
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.

c) Auf der Kurve g liegt der Punkt $P\left(u \middle| g(u)\right)$ mit $u > -\frac{1}{2}$.

Wie lautet die Gleichung der Tangente t an g in P ?

d) Die Tangente t bildet mit den beiden Achsen des Koordinatensystems ein rechtwinkliges Dreieck.
Für welches u wird der Flächeninhalt dieses Dreiecks minimal ?

Aufgabe 3	Vektorgeometrie	(12 Punkte)

Die Vektoren $\vec{p} = \begin{pmatrix} 10 \\ y \\ z \end{pmatrix}$ und $\vec{q} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ stehen senkrecht auf einander. Zudem hat $\vec{p}$ die Länge 15.

a) Bestimmen Sie y und z.

Fahren Sie jetzt weiter mit $\vec{p} = \begin{pmatrix} 10 \\ -11 \\ -2 \end{pmatrix}$

b) Im Quadrat $ABCD$ mit $A\left(-2|1|7\right)$ und $\overrightarrow{AB} = \vec{p}$ zeigt der Vektor $\overrightarrow{AD}$ in die selbe Richtung wie der Vektor $\vec{q}$. Bestimmen Sie die Koordinaten von B, C und D.

Fahren Sie jetzt weiter mit $B\left(8|-10|5\right)$, $C\left(18|0|0\right)$ und $D\left(8|11|2\right)$.

c) Wie lautet die Koordinatengleichung der Ebene durch A, B und C ?

d) Der Ursprung (Nullpunkt) O des Koordinatensystems ist die Spitze einer Pyramide mit der Grundfläche $ABCD$. Wie gross ist ihr Volumen ?

e) Wie gross ist der Winkel zwischen der Seitenkante AO der Pyramide und der Grundfläche $ABCD$?

Aufgabe 4	Wahrscheinlichkeitsrechnung	(9 Punkte)

Die Fussballmannschaft des *FC Mathematica* besteht aus 14 Feldspielern und 2 Torwarten (10 Feldspieler, 4 Ersatz-Feldspieler, 1 Torwart, 1 Ersatz-Torwart).

a) Vor jedem Match werden die Leibchen zufällig verteilt. Für die beiden Torwarte sind die Nummern 1 und 16 reserviert, für die Feldspieler die Shirts mit den Nummern 2 bis 15.
Wie viele Leibchenverteilungen sind möglich ?

Eine spielberechtigte Mannschaft besteht aus 10 Feldspielern und einem Torwart.

b) Für jedes Spiel lost der Trainer die spielberechtigte Mannschaft aus.
Wie viele verschiedene Mannschaften sind möglich ?

c) Auf wie vielen Arten kann die spielberechtigte Mannschaft auf dem Feld aufgestellt werden, wenn jeder Feldspieler (ausser dem Torwart) auf jeder Position spielen kann ?

d) Der Trainer ersetzt gleichzeitig 2 Feldspieler durch 2 Ersatzfeldspieler.
Wie viele Möglichkeiten gibt es, den Spielerwechsel vorzunehmen, wenn auf die Spielerposition nicht geachtet wird ?

Die Mannschaftsaufstellung des *FC Mathematica* besteht aus 2 Stürmern, 4 Mittelfeldspielern, 4 Verteidigern und 1 Torwart. Durchschnittlich schiesst jeder Stürmer in jedem 2. Spiel, jeder Mittelfeldspieler in jedem 3. Spiel, jeder Verteidiger in jedem 5. und der Torwart in jedem 20. Spiel mindestens ein Tor.

e) Mit welcher Wahrscheinlichkeit schiesst der Verteidiger Euler in genau einem von drei Spielen mindestens ein Tor ?

f) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der *FC Mathematica* im ersten Spiel mindestens ein Tor schiesst ?