Zeit: 180 Minuten

Es werden nur die vier am besten gelösten Aufgaben berücksichtigt. Jede Aufgabe wird mit maximal 10 Punkten bewertet. Vier vollständige, ausführlich hergeleitete Lösungen werden mit der Note 6 bewertet.

Hilfsmittel: Formelsammlung DMK
TI-92 oder Voyage 200 mit Handbuch

Der Einsatz der Hilfsmittel ist klar anzugeben.

Aufgabe 1

Gegeben sind die Punkte $P(4/2/0)$, $Q(2/4/0)$, $R(0/4/2)$ und $S(0/2/4)$.

a) Zeige, dass die Strecken $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$, und $\overline{RS}$ gleichlang sind. Skizziere diese Strecken in einem räumlichen Koordinatensystem.

b) Zeige, dass die Punkte P, Q, R und S in einer Ebene ε liegen und bestimme eine Koordinatengleichung von ε.

c) Berechne den Winkel zwischen ε und der xy-Ebene.

d) Die Punkte P, Q, R und S lassen sich durch zwei weitere Punkte T und U zu einem ebenen regelmässigen Sechseck mit dem Mittelpunkt M ergänzen. Bestimme die Koordinaten von M, T und U und vervollständige das Sechseck in der Skizze.

e) Das Sechseck ist die Grundfläche einer senkrechten Pyramide, deren Spitze in der xy-Ebene liegt. Bestimme die Koordinaten der Spitze und berechne den Volumeninhalt der Pyramide.

Aufgabe 2

Für jedes $a \in \mathbb{R}$ ist die Funktion f_a gegeben durch $f_a(x) = x \cdot \ln(x) - a \cdot x$, $x > 0$.
K_a sei der Graph von $f_a(x)$.

a) Bestimme Nullstellen, Extremal- und Wendepunkte der Funktion $f_a(x)$.

b) Untersuche das Verhalten der Funktion f_a und ihrer Ableitungsfunktion f_a' für $x \to 0$.
(Für Grenzwerte eventuell Formelsammlung benutzen.)

c) Zeichne K_1 im Bereich $0 < x \leq 4$ und K_2 im Bereich $0 < x \leq 8$ ins gleiche Koordinatensystem (Einheit: 4 Häuschen).

d) K_a und die x-Achse umschliessen eine Fläche. Diese soll durch eine Gerade durch den Ursprung halbiert werden. Bestimme eine Gleichung dieser Geraden.

Aufgabe 3

Von einem rechtwinklig-gleichschenkligen Dreieck ABC liegt die Spitze C auf der positiven x-Achse und die Hypotenuse c=12 cm auf der y-Achse.

a) Eine Kurve mit der Gleichung $y^2 = px + q$ berührt die beiden Katheten in den Endpunkten A und B der Hypotenuse. Bestimme p und q.
(Wer Teilaufgabe a) nicht lösen kann, der benutze für die Fortsetzung c=8 cm und als Kurvengleichung $y^2 = 16 - 8x$)

b) Die Kurve teilt die Dreiecksfläche in zwei Teilflächen. Berechne das Flächenverhältnis.

c) Die von der Kurve und den Katheten begrenzte Fläche rotiert um die x-Achse. Welches Volumen hat der dabei entstehende Rotationskörper?

d) Der Fläche zwischen der Kurve und der y-Achse soll das Trapez mit der Grundseite AB und dem grössten Flächeninhalt einbeschrieben werden (Maximumnachweis wird nicht verlangt). Wie lang sind die anderen Seiten des Trapezes?

Aufgabe 4

Bei der Herstellung von Spezialschrauben treten die beiden Fehler F_1: "Schraube besitzt falsche Länge" und F_2: "Schraube hat defektes Gewinde" unabhängig voneinander mit den Wahrscheinlichkeiten $p(F_1)=7.5$ % und $p(F_2)=2.7$ % auf.

a) Bestimme die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass bei der Produktion
   - a_1) eine fehlerhafte Schraube entsteht,
   - a_2) eine Schraube
     - a_{21}) beide Fehler,
     - a_{22}) genau einen Fehler

     aufweist.

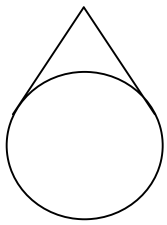
b) Wir nehmen jetzt an, die hergestellten Schrauben seien mit einer Wahrscheinlichkeit von 10 % fehlerhaft.
   - b_1) Mit welcher Wahrscheinlichkeit findet man unter 50 der Produktion rein zufällig entnommenen Schrauben
     - b_{11}) genau fünf,
     - b_{12}) höchstens drei

     unbrauchbare Schrauben?
   - b_2) Wie viele Schrauben darf man der Produktion höchstens entnehmen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 60 % nur einwandfreie zu erhalten?
   - b_3) Es werden Schrauben der laufenden Produktion entnommen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist
     - b_{31}) die fünfte die erste,
     - b_{32}) frühestens die vierte die erste

     unbrauchbare Schraube?

Aufgabe 5

Löse die voneinander unabhängigen Kurzaufgaben:



a) Um den Äquator der Erdkugel, die wir uns als exakte Kugel mit dem Radius $R = 6'370$ km denken, sei eine Schnur gespannt. Nun wird diese Schnur um $1 \text{ m} = 0.001$ km verlängert und in einem Punkt S von der Erdoberfläche angehoben, so dass sie wieder gespannt ist. In welcher Höhe über dem Erdboden liegt der Punkt S? Stelle eine Gleichung auf und löse diese mit dem Taschenrechner. (Das Resultat ist überraschend!)

b) Für eine Winter-Olympiade schickt die Schweiz eine Delegation von 35 Sportlern. Diese verteilen sich wie folgt auf die nachstehenden Disziplinen:

Disziplin	Snowboard	Langlauf	Ski Alpin
Anzahl Sportler	8	12	15

Für den Einzug zur Eröffnungsfeier wird der frühere Olympiasieger im Snowboard als Fahnenträger ausgewählt. Die restliche Delegation für die Eröffnungsfeier besteht aus je drei Vertretern pro Disziplin, welche in beliebiger Reihenfolge hinter dem Fahnenträger einmarschieren sollen. Wie viele Möglichkeiten für den Einmarsch der Schweizer-Delegation gibt es?

c) Für welche reellen Werte von m hat die Gleichung $\cos(2x) = m - x$ im Intervall $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ genau zwei verschiedene Lösungen?