

Obergymnasium

Klassen 6Ka, 6Lc, 6Ra (hoe), 6Rb (hoe), 6Rd, 6Wc

Zeit: 180 Minuten

Es werden nur die vier am besten gelösten Aufgaben berücksichtigt. Jede Aufgabe wird mit maximal 10 Punkten bewertet. Vier vollständige, ausführlich hergeleitete Lösungen werden mit der Note 6 bewertet.

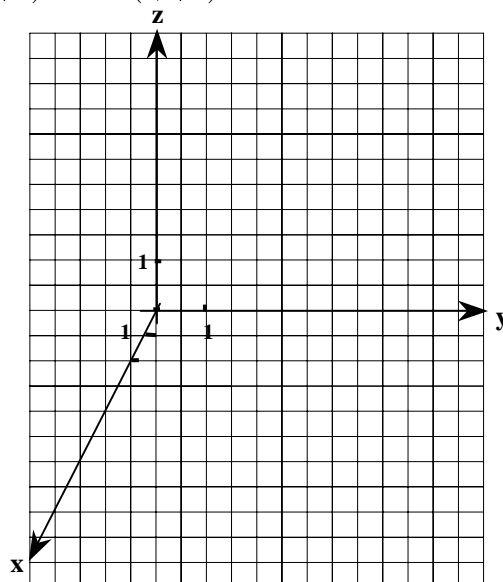
Hilfsmittel: Formelsammlung DMK
TI-92 oder Voyage 200 mit Handbuch

Der Einsatz der Hilfsmittel ist klar anzugeben.

Aufgabe 1

Die Ebene $E_1: x + 2y + 2z = 10$ und die Koordinatenebenen begrenzen eine Pyramide P_1 . Die Pyramide wird mit einer Ebene $E_2(ABC)$ mit $A(0/0/4)$, $B(3/0/2)$ und $C(2/1/2)$ geschnitten.

- Bestimme die Spurgeraden (Schnittgeraden mit den Koordinatenebenen) der Ebene E_1 .
- Zeichne die Pyramide in ein Koordinatensystem wie es in der Skizze dargestellt ist.
- Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene E_2 und eine Parameterdarstellung der Schnittgeraden der Ebenen E_1 und E_2 .
- Zeichne die Ebene E_2 mit der Schnittgeraden in das gleiche Koordinatensystem. Die Ebene E_2 und die Koordinatenebenen begrenzen eine Pyramide P_2 . Berechne das Volumen des Schnittkörpers $P_1 \cap P_2$.
- Bestimme den Winkel $\beta = \sphericalangle(ABC)$.



Aufgabe 2

Gegeben ist für jedes $a > 2$ die Funktion $f_a(x) = \frac{x}{a-2}(a-x^2)$.

- Untersuche $f_a(x)$ für $a=3$ auf Symmetrien, Nullstellen, Extremas, Wendepunkte und skizziere den Graphen.
- Allgemein: Bestimme den Hochpunkt H_a des Graphen von f_a .
- Für welches $a > 2$ liegt der in b) bestimmte Hochpunkt H_a am tiefsten?
 (Wenn b) nicht gelöst werden kann, so nehme man $H_a \left(\sqrt{\frac{a}{3}} / \frac{a^{\frac{3}{2}}}{a-2} \right)$)
- Für welches $a > 2$ ist der Abstand des Hochpunktes H_a vom Ursprung minimal?

Aufgabe 3

Ein Polynom $f(x)$ hat den Grad 4 und ist symmetrisch zur y -Achse. Die Wendetangente im Punkt $A(1/-2)$ hat die Steigung -4 .

- a) Bestimme die Funktionsgleichung $y = f(x)$.
(Wer Teilaufgabe a) nicht lösen kann, der verwende für die folgenden Aufgaben die Funktion $f(x) = \frac{1}{32}x^4 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}$, wobei diese Funktion im Punkt $B(2/-2)$ eine Wendetangente mit der Steigung -2 hat.)
- b) Durch die Tiefpunkte des Graphen wird eine Gerade g gezeichnet. Berechne den Inhalt der Fläche, welche der Graph der Funktion f und die Gerade g einschliessen.
- c) Das Kurvenstück des Graphen zwischen den beiden positiven Nullstellen rotiert um die x -Achse. Berechne das Volumen des entstehenden Rotationskörpers.
- d) Die beiden Wendetangenten und die Verbindungsgerade der Wendepunkte bilden ein Dreieck. In welchem Verhältnis teilt der Graph der Funktion f den Flächeninhalt dieses Dreieck?

Aufgabe 4

Ein Angestellter eines Reisebüros weiss aus langjähriger Erfahrung, dass 30 % seiner Kunden einen Urlaub auf der Ferieninsel F buchen.

- a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit befinden sich unter den nächsten 50 Buchungen
- a₁) genau 15
a₂) mindestens 12
Buchungen für die Insel F?
- b) Wie viele Buchungen müssen mindestens ausgeführt werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99 % wenigstens eine das Ziel F hat?
- c) Wegen des Buchungsverhaltens der Kunden organisiert das Reisebüro die Urlaubsreisen auf die Insel F in eigener Regie. Für den Transport der Urlaubsgäste wird ein Flugzeug gechartert, das 117 Plätze besitzt.
Da bekannt ist, dass 8 % der Fluggäste ihre Buchung kurzfristig annullieren, hat das Reisebüro für einen Flug 125 Tickets verkauft.
- c₁) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann es Ärger wegen Überbuchung geben?
c₂) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind noch Plätze frei?
c₃) Berechne mit Hilfe der Definition des Erwartungswertes: Wie viele der 125 Fluggäste treten im Mittel die Reise an?

Aufgabe 5

Löse die voneinander unabhängigen Kurzaufgaben:

- a) Unter welchem Winkel schneiden sich die Graphen der beiden Funktionen $f(x) = e^{4x}$ und $g(x) = e^{-2x}$?

- b) Bestimme z so, dass sich die Geraden g und h schneiden. Stelle dann eine Parameterdarstellung einer ihrer Winkelhalbierenden auf:

$$g: \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad h: \vec{r}(s) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ z \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

- c) Eine Urne enthält 8 weisse und 6 schwarze nummerierte Kugeln. Mit einem Griff werden 5 Kugeln aus der Urne entnommen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter den 5 gezogenen Kugeln

- c₁) genau zwei schwarze,
c₂) mindestens drei weisse
Kugeln sind?