

# Kantonsschule Luzern – Matura 2006

## Mathematik Grundlagenfach

Klassen 6Kc, 6Lb, 6Re, 6Wb

Martine Aeschlimann (aem)  
Andreas Felder (fea)  
Pierre-Dominique Hool (hop)  
Markus T. Schmid (scm)

Prüfungsdauer : 180 Minuten

Formelsammlung : Formeln und Tafeln, Verlag Orell-Füssli

Taschenrechner : TI-Voyage-200 oder TI-92-plus, ohne Handbuch,  
zusätzlich ein Rechner vom Typ TI-30

Darstellung : **Die Lösungsschritte müssen nachvollziehbar sein.**  
Aufgaben sauber und übersichtlich darstellen.

**Bitte für jede Aufgabe einen neuen Bogen verwenden.**

Punktzahl : 6 Aufgaben ergeben insgesamt 52 Punkte  
Für die Note 6 braucht es 49 Punkte

### Aufgabe 1

(4 Punkte)

Gegeben sind die vier Punkte  $A(0|2|4)$ ,  $B(1|0|5)$ ,  $C(2|2|4)$  und  $D(1|4|3)$ .

- Zeigen Sie, dass  $A$ ,  $B$ ,  $C$  und  $D$  in einer Ebene liegen.
- Weisen Sie nach, dass das Viereck  $ABCD$  ein Rhombus (= Raute) ist.

### Aufgabe 2

(11 Punkte)

Ein gerader Pyramidenstumpf ist durch folgende Eckpunkte gegeben:

$$A(7|1|-1), \quad B(7|9|-1), \quad C(3|9|-1), \quad D(3|1|-1),$$
$$E(6|3|7), \quad F(6|7|7), \quad G(4|7|7), \quad H$$

- Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes  $H$ .
- Die Gerade  $g$  durch die Punkte  $A$  und  $E$  sowie die Gerade  $h$  durch die Punkte  $B$  und  $F$  schneiden sich im Punkt  $S$ . Welche Koordinaten hat  $S$ ?
- Welchen Winkel bilden die Seitenfläche  $BCGF$  und die Grundfläche  $ABCD$  mit einander?
- Wie gross ist der Abstand des Punktes  $B$  von der Körperdiagonalen ( $AG$ )?

**Aufgabe 3**

(11 Punkte)

Gegeben ist die Funktion  $f(x) = t \cdot x + e^{-x}$ ,  $t > 0$ .

- a) Bestimmen Sie die  $x$ -Werte der Extrema und Wendepunkte von  $f$ .

Für welche Werte von  $t$  hat die Funktion  $f$  an der Stelle  $x = 1$  einen Extrempunkt?

- b) Die Kurve schneidet die  $y$ -Achse im Punkt  $S$ . Wie lautet die Gleichung der Tangente an die Kurve in  $S$ ?

Für welchen Wert von  $t$  beträgt der Steigungswinkel dieser Tangente  $45^\circ$ ?

- c) Die Gerade  $x = t$  schneidet die Gerade  $y = t \cdot x$  im Punkt  $D$  und den Grafen von  $f$  im Punkt  $E$ .

Ferner sei  $F(0|0)$ .

Für welches  $t$  nimmt der Flächeninhalt des Dreiecks  $DEF$  einen Extremwert an?

Wie gross ist diese Fläche?

Zeigen Sie, dass es sich dabei um eine maximale Fläche handelt.

**Aufgabe 4**

(12 Punkte)

Gegeben ist eine Funktionenschar  $f_a$  durch die Gleichung

$$y = f_a(x) = \frac{2x^2 - a}{x^2}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad a \in \mathbb{R}^+$$

Die zugehörige Kurvenschar sei  $G_a$ .

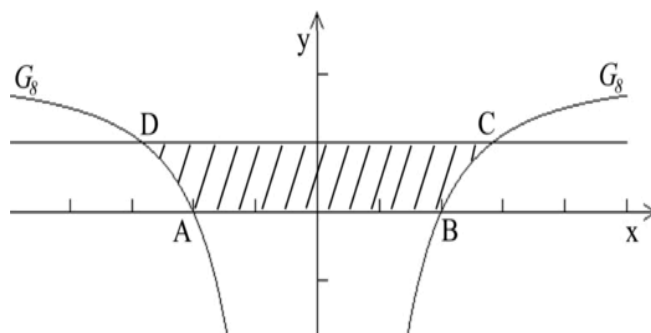
- a) Berechnen Sie die Nullstellen von  $f_a$  sowie die Gleichungen der beiden Asymptoten von  $G_a$ . Weisen Sie nach, dass  $G_a$  weder lokale Extrempunkte noch Wendepunkte hat.

- b) Die Skizze zeigt den Verlauf von  $G_8$ .

Der Graf  $G_8$  schneidet die  $x$ -Achse in den Punkten  $A$  und  $B$  und die Gerade mit der Gleichung  $y = 1$  in den Punkten  $C$  und  $D$ .

Die schraffierte Fläche habe den Inhalt  $F$ , das Trapez  $ABCD$  den Inhalt  $T$ .

Um wie viel Prozent ist  $T$  grösser als  $F$ ?



- c) Die Gerade durch die Punkte  $A$  und  $C$  begrenzt zusammen mit der  $x$ -Achse und dem Grafen  $G_8$  eine Fläche. Durch Rotation dieser Fläche entsteht ein Rotationskörper.

Berechnen Sie sein Volumen.

**Aufgabe 5**

(5 Punkte)

In einer Urne hat es 145 Kugeln in den Farben schwarz, rot und weiss. Man zieht zwei Kugeln, ohne sie zurück zu legen.

Die Wahrscheinlichkeit, dass zwei weisse Kugeln gezogen werden, beträgt  $\frac{5}{174}$ .

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine der beiden Kugeln schwarz, die andere weiss ist, beträgt  $\frac{5}{58}$ .

Wie viele rote Kugeln liegen in der Urne ?

**Aufgabe 6**

(9 Punkte)

Jeden Herbst raten die Ärzte vor allem älteren Personen, sich gegen die Grippe impfen zu lassen, da für sie die Folgen einer Erkrankung gravierend sein können.

Von der Gruppe der über 60-jährigen Personen ist folgendes bekannt:

- 9% erkranken im Winter an Grippe;
- 65% lassen sich impfen; davon bleiben 99% von der Grippe verschont.

Die folgenden Fragen beziehen sich auf die Gruppe der über 60-jährigen Personen.

- a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich eine beliebig ausgewählte Person impfen lässt und an Grippe erkrankt ?
- b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine nicht geimpfte Person krank wird ?
- c) Wie viele geimpfte Personen muss ein Arzt untersuchen, damit er mit 90-prozentiger Wahrscheinlichkeit mindestens eine Person findet, die an Grippe erkrankt ist ?

Der Seniorenturnverein zählt 40 Mitglieder. Alle sind über 60 Jahre alt und geimpft.

- d) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass trotzdem 2 bis 4 Mitglieder an Grippe erkranken ?
- e) Die Zufallsvariable  $X$  steht für die Anzahl Mitglieder des Seniorenturnvereins, die an Grippe erkranken. Berechnen Sie den Erwartungswert  $E(X)$ .