KANTON LUZERN | Kantonsschule Luzern | Obergymnasium

MATURA 2005
Mathematik
Klassen 6Ra, 6Kb

Zeit: 180 Minuten

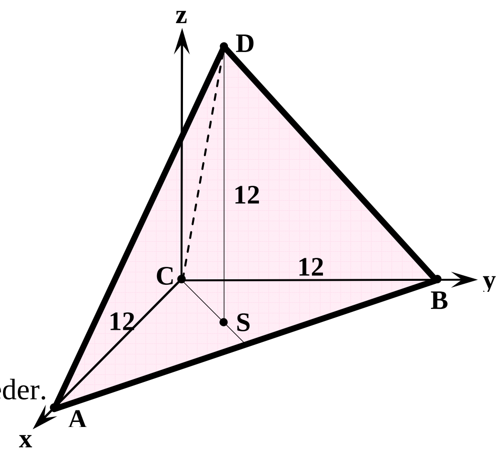
Es werden nur die vier am besten gelösten Aufgaben berücksichtigt. Jede Aufgabe wird mit maximal 10 Punkten bewertet. Vier vollständige, ausführlich hergeleitete Lösungen werden mit der Note 6 bewertet.

Hilfsmittel: Formelsammlung DMK
Rechner **TI** mit Handbuch

Der Einsatz der Hilfsmittel ist klar anzugeben.

1. Vektorgeometrie

Gegeben ist das skizzierte Tetraeder ABCD, wobei der Punkt S der Schwerpunkt des Dreiecks ABC ist und die Gerade g durch die Punkte P(11, 0, 9) und Q(-4, 12, 0).



a) Bestimme die Koordinatengleichung der Ebene E_1 (ABD).

b) Bestimme die Parametergleichung der Schnittgerade von E_1 mit der Ebene E_2(D, g).

c) Unter welchem Winkel schneidet die Gerade g die Ebene E_1 ?

d) Bestimme die Durchstosspunkte der Geraden g durch das Tetraeder.

2. Analysis

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto 2(1-2x)\, e^{-\frac{x}{2}}$ für $x \in \mathbb{R}$.

a) Bestimme die Asymptote, Nullstelle, das Extremum, den Wendepunkt und die Wendetangente. (Resultate: exakte Werte und vernünftig gerundete Dezimalzahlen)

b) Zeichne eine saubere Skizze des Graphen der Funktion f mit der Wendetangente für $-1 \le x \le 10$ (Einheit 4 Häuschen).

c) Die positive x-Achse und der Graph der Funktion f sowie die Wendetangente bestimmen eine endliche und auch eine ins Unendliche reichende Fläche. Bestimme den Flächeninhalt derjenigen Fläche, die ins Unendliche reicht.

3. Extremalwertaufgabe

Es steht ein quadratischer Karton mit der Seitenlänge 8 cm zur Verfügung. Daraus soll das zusammenhängende sternförmige Netz einer geraden Pyramide mit einer quadratischen Grundfläche hergestellt werden. Das Volumen der Pyramide soll maximal sein.

a) Zeichne das Netz der Pyramide. Welche Werte kann die Quadratseite der Pyramidengrundfläche annehmen (Stelle eine Bedingung für die Länge der Quadratseite auf.)?

b) Berechne für die Pyramide mit dem grössten Volumen die Quadratseite der Grundfläche und das Volumen.

4. Wahrscheinlichkeit

Ein Messgerät des Typs A erleidet bei einem Einsatz mit der Wahrscheinlichkeit $p_A = 0.65$ **keine** Panne.

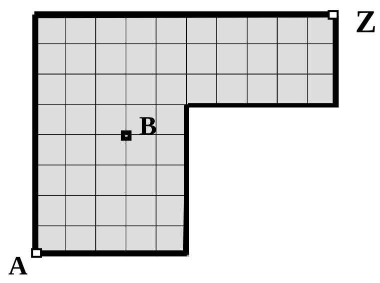
a) Ein Messgerät des Typs A wird bei 12 Kontrollen eingesetzt. X ist die Zuvallsvariable für die Anzahl erfolgreicher Messungen. Bestimme die Verteilung von X und zeichne sie mit einer geeigneten Skalenwahl. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens bei 5 von 12 Messungen eine Panne eintritt. Berechne den Erwartungswert von X.

b) Neben 9 Messgeräten des Typs A hat eine Firma auch noch 15 bessere Messgeräte eines Typs B angeschafft. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Gerät B bei einem Einsatz keine Panne hat ist $p_B = 0.85$. Ein für einen Notfall zufällig ausgewähltes Gerät erleidet eine Panne. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es ein Messgerät des Typs B ist?

5. Kurzaufgaben

Die drei Teilaufgaben sind voneinander unabhängig.

a) Jeder **kürzeste** Weg von A nach Z **auf dem skizzierten Gitternetz** hat die gleiche Chance ausgewählt zu werden. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein kürzester Weg gewählt wird, der über den Punkt B geht?



b) Auf einer Baustelle muss die Arbeit witterungsbedingt eingestellt werden. Die 17 Arbeiter müssen auf die 4 Arbeitsstellen A, B, C und D verteilt werden.
Dabei sind folgende Bedingungen zu beachten:

- jede Arbeitsstelle muss mindestens zwei Arbeiter übernehmen
- die Arbeitsstelle A kann **nur** Viererteams einsetzen.
- welcher Arbeiter auf welcher Baustelle eingesetzt wird, wird nicht berücksichtigt. d.h. Es wird nur die anzahlmässige Verteilung betrachtet.

Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Arbeiter zu verteilen?

c) Bestimme, charakterisiere und skizziere in der Gausschen Zahlenebene die Mengen
$A = \{ z \mid z \in \mathbb{C} \text{ und } (1-i)z + (1+i)\bar{z} - 2 = 0 \}$
$B = \{ z \mid z \in \mathbb{C} \text{ und } z\bar{z} - (4-3i)z - (4+3i)\bar{z} + 5 = 0 \}$ und die Schnittmenge $A \cap B$.