KANTON LUZERN
Bildungs- und Kulturdepartement

Kantonsschule Alpenquai Luzern

Schriftliche Maturitätsprüfung 2022

Fach	Mathematik Grundlagenfach
Prüfende Lehrpersonen	Christoph Arnold christoph.arnold@edulu.ch Andreas Bolfing andreas.bolfing@edulu.ch Patrik Hess patrik.hess@edulu.ch Stefan Müller stefan.mueller@edulu.ch
Klassen	G18e / G18f / G18g / G18h / G18k / T17a
Prüfungsdatum	20. Mai 2022
Prüfungsdauer	180 Minuten
Erlaubte Hilfsmittel	- «Formeln, Tabellen, Begriffe», DMK, DPK, DCK (2009) - Taschenrechner TI-30X Pro MultiView oder MathPrint (ohne Benutzerhandbuch)
Anweisungen zur Lösung der Prüfung	- Es wird Wert auf eine saubere Darstellung gelegt. - Jede Aufgabe soll einen vollständigen und nachvollziehbaren Lösungsweg enthalten. - Jede Aufgabe soll auf einem neuen Bogen begonnen werden. - Jeder Bogen ist mit dem Namen zu beschriften.
Anzahl erreichbarer Punkte	Aufgabe 1: 10.5 Aufgabe 2: 9 Aufgabe 3: 11 Aufgabe 4: 7 Aufgabe 5: 5.5 Total: 43 Für die Note 6 werden mindestens 38 Punkte benötigt.
Anzahl Seiten (inkl. Titelblatt)	4

....
Name, Vorname Klasse Nummer

	a1	a2	b1	b2	c1	c2	d	**Punkte**
Aufgabe 1 - Vektorgeometrie	1	1	0.5	1.5	1	3.5	2	**10.5**

a) $g: \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix} \qquad h: \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} -16 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

a1) Bestimmen Sie den Schnittpunkt S der beiden Geraden g und h.

a2) Bestimmen Sie den Schnittwinkel der Geraden g und h.

b) $E: \quad 3x - 7y + 3 = 0$

b1) Beschreiben Sie die spezielle Lage der Ebene E.

b2) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Ebene E an.

c)

$$E_1: \quad x + y - z + 7 = 0 \qquad E_2: \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad E_3: \quad \frac{x}{5} + y - \frac{z}{5} = 1$$

c1) In welchen Punkten A, B und C schneidet die Ebene E_3 die x-, y- und die z-Achse?

c2) Berechnen Sie den spitzen Schnittwinkel der beiden Ebenen E_1 und E_2 auf 3 Nachkommastellen genau gerundet.

d) $P(3/2/1) \quad Q(5/3/3) \quad R(-1/3/9)$

Berechnen Sie den Flächeninhalt A des Dreiecks PQR.

	a	b	c	d	Punkte
Aufgabe 2 – Analysis	2.5	1	2.5	3	**9**

Gegeben ist die Funktion $f(x) = -x^3 + 3x^2$

a) Untersuchen Sie die Funktion auf Nullstellen, Hoch-, Tief- und Wendepunkte.

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Wendetangente.

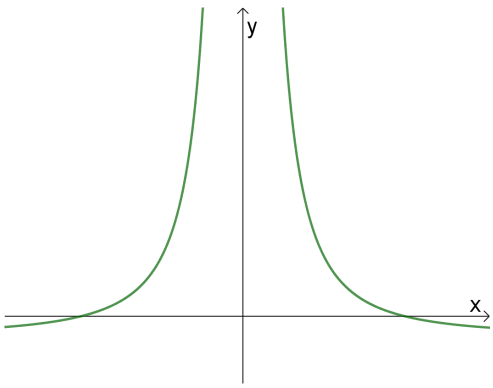
c) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, welche vom Graphen von f, von der Wendetangente und der y-Achse eingeschlossen wird. Das Integral ist mit Hilfe von Stammfunktionen zu bestimmen.

d) Im ersten Quadranten liegt ein Punkt $P(u / f(u))$ auf dem Graphen von f. Das Dreieck $O(0/0)P'(u/0)P(u/f(u))$ rotiert um die x-Achse und erzeugt so einen geraden Kreiskegel.
Bestimmen Sie die Koordinaten von P so, dass das Kegelvolumen maximal ist.

	a	b	c	d	Punkte
Aufgabe 3 – Analysis	0.5	5	3.5	2	**11**

Gegeben ist die Funktion
$$f(x) = \frac{4-x^2}{4x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{4}$$

Die nebenstehende Abbildung zeigt eine Skizze des Graphen.



a) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion und skizzieren Sie den Graphen im Koordinatensystem. Einheit 4 Häuschen.

t_a sei die Tangente an den Graphen von f im Punkt P_a an der Stelle $x = a,\ a > 0$.

b) Sei $a = 1$.
Der Graph von f, die Tangente t_1 und die Parallele zur x-Achse durch P_1 schliessen eine Fläche ein. Zeichnen Sie die Tangente und die zu berechnende Fläche in der Skizze ein. Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.

c) Jetzt sei $a > 0$ variabel.
Welchen Wert muss a haben, damit t_a die waagrechte Asymptote des Graphen von f an der Stelle $x = 1$ schneidet?

d) Es gibt einen Kreis, der den Graphen von f in den Schnittpunkten mit der x-Achse berührt. Berechnen Sie den Mittelpunkt dieses Kreises.

	a	b	c	d	e	f	g	Punkte
Aufgabe 4 - Stochastik	0.5	0.5	1	1	1	1.5	1.5	**7**

Susi, Fredy und Klara spielen Dart. Susi trifft das schwarze Feld in der Mitte der Scheibe mit der Wahrscheinlichkeit 0.8. Fredy mit der Wahrscheinlichkeit 0.5 und Klara mit der Wahrscheinlichkeit 0.3.

Alle werfen jetzt genau einen Pfeil. Das gilt für die Teilaufgaben a) bis c).

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass alle das schwarze Feld in der Mitte treffen.
b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass nur Fredy das schwarze Feld in der Mitte trifft?
c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass das schwarze Feld in der Mitte nur von einem Pfeil getroffen wird?

Eine Runde besteht nun darin, dass Susi, Fredy und Klara je einen Pfeil werfen.

d) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass das schwarze Feld in der Mitte bei 3 Runden nie getroffen wird?
e) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass das schwarze Feld in der Mitte bei 3 Runden von mindestens einem Pfeil getroffen wird?
f) Wie viele Runden sind nötig, damit das schwarze Feld in der Mitte mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0.99999 mindestens einmal getroffen wird?

Susi bietet nun Klara folgendes Spiel an:

Für 2 Franken Einsatz darf Klara drei Pfeile werfen. Treffen alle drei Pfeile das schwarze Feld in der Mitte, so wird der Einsatz zusammen mit einem Gewinn von 10 Franken ausbezahlt. Bei genau zwei Treffern wird der Einsatz zusammen mit einem Gewinn von 1 Franken ausbezahlt.

g) Klara winkt ab und meint, das Spiel lohne sich für sie grundsätzlich nicht. Hat Klara richtig überlegt? Begründen Sie ihre Antwort mit einer passenden Rechnung.

	a	b	c	d	Punkte
Aufgabe 5 - Kombinatorik	0.5	1.5	1.5	2	**5.5**

Eine Sportklasse Sport Damen besteht aus 9 Schülerinnen der Klasse 6a und 6 Schülerinnen der Klasse 6b.

Zu Beginn der Sportstunde sollen sich alle Schülerinnen in einer Reihe aufstellen.

a) Wie viele Reihenfolgen sind möglich?

b) Die vier Freundinnen Amina, Bea, Carmen und Dora wollen in der Reihe nebeneinander stehen. Wie viele Reihenfolgen sind möglich, bei denen das der Fall ist?

c) Für ein Spiel werden 5 Schiedsrichterinnen ausgewählt. Drei sollen aus der Klasse 6a und zwei aus der Klasse 6b sein.
Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Auswahl der Schiedsrichterinnen?

d) Für eine letzte Übung soll die ganze Sportklasse in Dreiergruppen aufgeteilt werden.
Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Bildung der Gruppen?

Kantonsschule Alpenquai Luzern

Schriftliche Maturitätsprüfung 2022 Lösungen

Fach	Mathematik Grundlagenfach
Prüfende Lehrpersonen	Christoph Arnold christoph.arnold@edulu.ch Andreas Bolfing andreas.bolfing@edulu.ch Patrik Hess patrik.hess@edulu.ch Stefan Müller stefan.mueller@edulu.ch
Klassen	G18e / G18f / G18g / G18h / G18k / T17a
Prüfungsdatum	20. Mai 2022
Prüfungsdauer	180 Minuten
Erlaubte Hilfsmittel	- «Formeln, Tabellen, Begriffe», DMK, DPK, DCK (2009) - Taschenrechner TI-30X Pro MultiView oder MathPrint (ohne Benutzerhandbuch)
Anweisungen zur Lösung der Prüfung	- Es wird Wert auf eine saubere Darstellung gelegt. - Jede Aufgabe soll einen vollständigen und nachvollziehbaren Lösungsweg enthalten. - Jede Aufgabe soll auf einem neuen Bogen begonnen werden. - Jeder Bogen ist mit dem Namen zu beschriften.
Anzahl erreichbarer Punkte	Aufgabe 1: 10.5 Aufgabe 2: 9 Aufgabe 3: 11 Aufgabe 4: 7 Aufgabe 5: 5.5 Total: 43 Für die Note 6 werden mindestens 38 Punkte benötigt.
Anzahl Seiten (inkl. Titelblatt)	4

……………………………………………………………… ……………… ………………

Name, Vorname Klasse Nummer

	a1	a2	b1	b2	c1	c2	d	Punkte
Aufgabe 1 - Vektorgeometrie	1	1	0.5	1.5	1	3.5	2	**10.5**

a) $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix} \qquad h: \vec{r} = \begin{pmatrix} -16 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

a1) Bestimmen Sie den Schnittpunkt S der beiden Geraden g und h.

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 3s - 8t = -13 \\ 5s + 3t = 11 \\ 9s + t = 11 \end{array} \right| \Rightarrow \underline{s = 1,\ t = 2} \quad \underline{\underline{S(0/0/7)}}$$

a2) Bestimmen Sie den Schnittwinkel der Geraden g und h.

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\left| \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{115} \cdot \sqrt{74}} \right) = \arccos\left(\frac{|0|}{\sqrt{115} \cdot \sqrt{74}} \right) = \underline{\underline{90°}}$$

alle Winkel

b) $E: \ 3x - 7y + 3 = 0$

b1) Beschreiben Sie die spezielle Lage der Ebene E.

E ist parallel zur z-Achse, also normal zur xy-Ebene.

b2) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Ebene E an.

$$\text{Zwei Punkte von E: } P_1(-1/0/0),\ P_2\left(0/\frac{3}{7}/0\right) \Rightarrow \tilde{\vec{v}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3/7 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ da Ebene parallel zur z-Achse}$$

$$\underline{\underline{E: \ \vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}}$$

c)

$$E_1:\quad x+y-z+7=0 \qquad E_2:\quad \vec{r}=\begin{pmatrix}2\\3\\-8\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix} \qquad E_3:\quad \frac{x}{5}+y-\frac{z}{5}=1$$

c1) In welchen Punkten A, B und C schneidet die Ebene E_3 die x-, y- und die z-Achse?

$$\underline{\underline{A(5/0/0)\ B(0/1/0)\ C(0/0/-5)}}$$

c2) Berechnen Sie den Schnittwinkel der beiden Ebenen E_1 und E_2 auf drei Nachkommastellen genau gerundet.

$$\overrightarrow{n_{E_1}}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{n_{E_2}}=\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-(-1)\\-(2-(-4))\\2-12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-6\\-10\end{pmatrix}\to\underline{\begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix}}$$

$$\varphi=\arccos\left(\frac{\overbrace{\left|\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix}\right|}}{\underbrace{\sqrt{3}\cdot\sqrt{38}}}\right)=\arccos\left(\frac{|-4|}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{38}}\right)\approx 67.9982°\ldots\approx\underline{\underline{67.998°}}$$

d) $P(3/2/1)\quad Q(5/3/3)\quad R(-1/3/9)$

Berechnen Sie den Flächeninhalt A des Dreiecks ABC.

$$A=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}\right| \qquad =\frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-4\\1\\8\end{pmatrix}\right|=\frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}6\\-24\\6\end{pmatrix}\right| \qquad =\frac{1}{2}\sqrt{36+576+36}=\underline{\underline{9\sqrt{2}}}\ [\approx 12.728]$$

Oder

$$\alpha=\sphericalangle QPR \quad\Rightarrow\quad \cos(\alpha)=\frac{\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4\\1\\8\end{pmatrix}}{3\cdot 9}=\frac{9}{27}=\frac{1}{3}$$

$$A=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{PQ}\right|\cdot\left|\overrightarrow{PR}\right|\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 9\cdot\sin\left(\arccos\left(\frac{1}{3}\right)\right)\approx\underline{\underline{12.728}}$$

	a	b	c	d	**Punkte**
Aufgabe 2 – Analysis	2.5	1	2.5	3	**9**

Gegeben ist die Funktion $f(x) = -x^3 + 3x^2$

a) Untersuchen Sie die Funktion auf Nullstellen, Hoch-, Tief- und Wendepunkte.

Nullstellen: $f(x) = -x^3 + 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(-x+3) = 0 \Leftrightarrow \underline{x_1 = 0,\ x_2 = 3}$

Extrempunkte:

$f'(x) = -3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow 3x(-x+2) = 0 \Leftrightarrow \underline{x_1 = 0,\ x_2 = 2}$

$f''(x) = -6x + 6$

$f''(0) = 6 > 0 \Rightarrow \underline{\underline{T(0/0)}}$ Tiefpunkt $f''(2) = -6 < 0 \Rightarrow \underline{\underline{H(2/4)}}$ Hochpunkt

Wendepunkte:

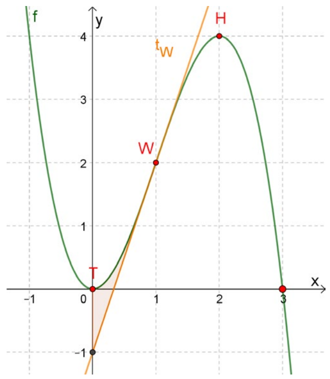
$f''(x) = -6x + 6 = 0 \Leftrightarrow \underline{x = 1}$

$f'''(x) = -6 \neq 0 \Rightarrow \underline{\underline{W(1/2)}}$ Wendepunkt

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Wendetangente.

$t_W:\ y = f'(1)(x-1) + 2 = 3(x-1) + 2$ $\underline{\underline{t_W:\ y = 3x - 1}}$

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche, welche vom Graphen von f, von der Wendetangente und der y-Achse eingeschlossen wird. Das Integral ist mit Hilfe von Stammfunktionen zu bestimmen.



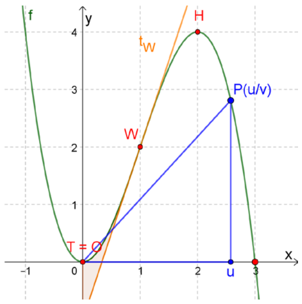
$$A = \int_0^1 \left(f(x) - t_W(x)\right)dx = \underline{\int_0^1 \left(-x^3 + 3x^2 - 3x + 1\right)dx}$$

$$= \left[-\frac{1}{4}x^4 + x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x\right]_0^1$$

$$= -\frac{1}{4} + 1 - \frac{3}{2} + 1 = \frac{-1+4-6+4}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\underline{\underline{A = \frac{1}{4} = 0.25}}$$

d) Im ersten Quadranten liegt ein Punkt $P(u/f(u))$ auf dem Graphen von f. Das Dreieck $O(0/0)P'(u/0)P(u/f(u))$ rotiert um die x-Achse und erzeugt so einen geraden Kreiskegel.
Bestimmen Sie die Koordinaten von P so, dass das Kegelvolumen maximal ist.



$P(u/f(u)) = \underline{P(u/-u^3+3u^2)}$

Gerader Kreiskegel mit Radius $r=-u^3+3u^2$ und Höhe $h=u$

$$V(u)=\frac{1}{3}r^2\pi h=\frac{1}{3}\left(-u^3+3u^2\right)^2\pi u$$

$$=\frac{\pi}{3}u\left(u^6-6u^5+9u^4\right)=\underline{\frac{\pi}{3}\left(u^7-6u^6+9u^5\right)}$$

$$V'(u)=\frac{\pi}{3}\left(7u^6-36u^5+45u^4\right)=\frac{\pi}{3}u^4\left(7u^2-36u+45\right)$$

$$V'(u)=0 \quad \Leftrightarrow \quad u^4\left(7u^2-36u+45\right)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{u_1=3,\ u_2=\frac{15}{7}}\approx 2.14,\ \cancel{u_3=0}$$

$$V''(u)=\frac{\pi}{3}\left(42u^5-180u^4+180u^3\right)$$

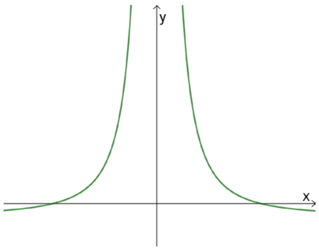
$$V''(3)=162\pi>0,\quad V''\left(\frac{15}{7}\right)\approx -132<0 \quad \Rightarrow \quad \text{Hochpunkt}$$

$$\underline{\underline{P\left(\frac{15}{7}/\frac{1350}{343}\right)\approx P(2.14/3.94)}}$$

	a	b	c	d	Punkte
Aufgabe 3 – Analysis	0.5	5	3.5	2	**11**

Gegeben ist die Funktion $f(x)=\frac{4-x^2}{4x^2}=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{4}$

Die nebenstehende Abbildung zeigt eine Skizze des Graphen.



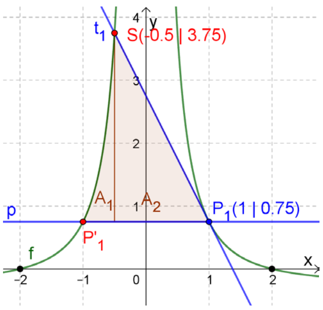
a) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion und skizzieren Sie den Graphen im Koordinatensystem. Einheit 4 Häuschen.

Nullstellen:

$$f(x)=\frac{4-x^2}{4x^2}=0 \quad \Leftrightarrow \quad |x|=2 \quad \underline{\underline{x_1=-2,\ x_2=2}}$$

t_a sei die Tangente an den Graphen von f im Punkt an der Stelle $x=a,\ a>0$.

b) Sei $a=1$.
Der Graph von f, die Tangente t_1 und die Parallele zur x-Achse durch P_1 schliessen eine Fläche ein.
Zeichnen Sie die Tangente und die zu berechnende Fläche in der Skizze ein. Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.



$$f(x)=\frac{4-x^2}{4x^2}=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \underline{f'(x)=-2x^{-3}}$$

$$P_1\left(1/\frac{3}{4}\right)$$

$$\underline{t_1: y=}\ f'(1)(x-1)+\frac{3}{4}=(-2)(x-1)+\frac{3}{4}=\underline{-2x+\frac{11}{4}}$$

Schnittpunkt $\{S\}=f\cap t_1$:

$$\frac{4-x^2}{4x^2}=-2x+\frac{11}{4}\Big|\cdot 4x^2 \quad \Leftrightarrow \quad 4-x^2=-8x^3+11x^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$2x^3-3x^2+1=0 \quad \overset{TR}{\Rightarrow} \quad x_1=x_2=1,\ \underline{x_3=-\frac{1}{2}}$$

$$S\left(-\frac{1}{2}/f\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=\underline{S\left(-\frac{1}{2}/3.75\right)}$$

$P_1'\left(-1/\frac{3}{4}\right)$ wegen der Symmetrie des Graphen bez. der y-Achse.

$$\begin{aligned}A &= A_1 + A_2\\ &= \int_{-1}^{-\frac{1}{2}}\left(f(x)-\frac{3}{4}\right)dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{1}\left(t_1(x)-\frac{3}{4}\right)dx\\ &= \int_{-1}^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\right)dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{1}\left(-2x+\frac{11}{4}-\frac{3}{4}\right)dx\\ &= \left[-\frac{1}{x}-x\right]_{-1}^{-\frac{1}{2}} + \left[-x^2+2x\right]_{-\frac{1}{2}}^{1} = 2+\frac{1}{2}-(-1+1)+(-1)+2-\left(-\frac{1}{4}-1\right) = \underbrace{\frac{1}{2}+\frac{9}{4}} = \underline{\underline{\frac{11}{4}}}\end{aligned}$$

A_2 als Flächeninhalt eines Dreiecks:

$$A_2 = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(f\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{15}{4}-\frac{3}{4}\right) = \underline{\frac{9}{4}}$$

c) Jetzt sei $a > 0$ variabel.
Welchen Wert muss a haben, damit t_a die waagrechte Asymptote des Graphen von f an der Stelle $x = 1$ schneidet?

$$\underline{P_a\left(a \,/\, \frac{4-a^2}{4a^2}\right) \qquad f'(x) = -2x^{-3}}$$

$$\underline{t_a : y =} f'(a)(x-a)+\frac{4-a^2}{4a^2} = \left(-2a^{-3}\right)(x-a)+\frac{4-a^2}{4a^2} \qquad = -\frac{2}{a^3}x+\frac{2}{a^2}+\frac{4-a^2}{4a^2}$$

$$\underline{t_a : y = -\frac{2}{a^3}x+\frac{12-a^2}{4a^2}}$$

Gleichung der waagrechten Asymptote von f: $\underline{y = -\frac{1}{4}}\ \left[= \lim_{|x|\to\infty} f(x)\right]$

x-Koordinate des Schnittpunkts der waagrechten Asymptote mit der Tangente t_a:

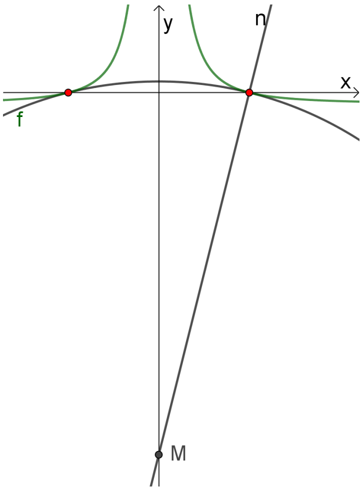
$$-\frac{2}{a^3}x+\frac{12-a^2}{4a^2} = -\frac{1}{4} \quad\Leftrightarrow\quad \underline{x =} -\frac{a^3}{2}\left(-\frac{1}{4}-\frac{12-a^2}{4a^2}\right) = \frac{a^3}{8}+\frac{12a-a^3}{8} = \frac{12a}{8} = \underline{\frac{3a}{2}}$$

$$x = 1 \quad\Rightarrow\quad 1 = \frac{3a}{2} \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{a = \frac{2}{3}}}$$

Variante:
x-Koordinate des Schnittpunkts der waagrechten Asymptote mit der Tangente t_a ist gleich 1:

$$-\frac{2}{a^3}x+\frac{12-a^2}{4a^2} = -\frac{1}{4} \overset{x=1}{\Leftrightarrow} -\frac{2}{a^3}+\frac{12-a^2}{4a^2} = -\frac{1}{4}\Big|\cdot 4a^3 \quad\Leftrightarrow\quad -8+12a-a^3 = -a^3 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{a = \frac{2}{3}}}$$

d) Es gibt einen Kreis, der den Graphen von f in den Schnittpunkten mit der x-Achse berührt. Berechnen Sie den Mittelpunkt dieses Kreises.



Der Mittelpunkt M des gesuchten Kreises ist der Schnittpunkt der Kurvennormalen im Punkt $N(2/0)$ mit der y-Achse.

$$n: y = -\frac{1}{f'(2)}(x-2)+0 = -\frac{1}{-\frac{1}{4}}(x-2) = 4(x-2)$$

$$n: y = 4x-8$$

$$\{M\} = n \cap y-Achse: \; \underline{\underline{M(0/-8)}}$$

	a	b	c	d	e	f	g	**Punkte**
Aufgabe 4 - Stochastik	0.5	0.5	1	1	1	1.5	1.5	**7**

Susi, Fredy und Klara spielen Dart. Susi trifft das schwarze Feld in der Mitte der Scheibe mit der Wahrscheinlichkeit 0.8. Fredy mit der Wahrscheinlichkeit 0.5 und Klara mit der Wahrscheinlichkeit 0.3.

Alle werfen jetzt genau einen Pfeil. Das gilt für die Teilaufgaben a) bis c).

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass alle das schwarze Feld in der Mitte treffen.

$$P = 0.8 \cdot 0.5 \cdot 0.3 = \underline{\underline{0.12}}$$

b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass nur Fredy das schwarze Feld in der Mitte trifft?

$$P = 0.2 \cdot 0.5 \cdot 0.7 = \underline{\underline{0.07}}$$

c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass das schwarze Feld in der Mitte nur von einem Pfeil getroffen wird?

$$P = 0.8 \cdot 0.5 \cdot 0.7 + 0.2 \cdot 0.5 \cdot 0.7 + 0.2 \cdot 0.5 \cdot 0.3 = 0.28 + 0.07 + 0.03 = \underline{\underline{0.38}}$$

Eine Runde besteht nun darin, dass Susi, Fredy und Klara je einen Pfeil werfen.

d) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass das schwarze Feld in der Mitte bei 3 Runden nie getroffen wird?

$$P = (0.2 \cdot 0.5 \cdot 0.7)^3 = 0.07^3 = \underline{\underline{0.000343}}$$

e) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass das schwarze Feld in der Mitte bei 3 Runden von mindestens einem Pfeil getroffen wird?

$$P = 1 - P(d)) = 1 - (0.2 \cdot 0.5 \cdot 0.7)^3 = \underline{\underline{0.999657}}$$

f) Wie viele Runden sind nötig, damit das schwarze Feld in der Mitte mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0.99999 mindestens einmal getroffen wird?

$$P(\text{"mindestens ein Treffer"}) = 1 - P(\text{"kein Treffer"}) = 1 - (0.2 \cdot 0.5 \cdot 0.7)^n \geq 0.99999$$

$$1 - (0.2 \cdot 0.5 \cdot 0.7)^n \geq 0.99999$$

$$0.00001 \geq 0.07^n \quad |\ln(\ )$$

$$\ln(0.00001) \geq n \cdot \ln(0.07) \quad |: \underbrace{\ln(0.07)}_{<0}$$

$$\frac{\ln(0.00001)}{\ln(0.07)} \approx 4.3 \leq n \qquad \text{Es sind also mindestens } \underline{\underline{n = 5}} \text{ Runden nötig}$$

Susi bietet nun Klara folgendes Spiel an:
Für 2 Franken Einsatz darf Klara drei Pfeile werfen. Treffen alle drei Pfeile das schwarze Feld in der Mitte, so wird der Einsatz zusammen mit einem Gewinn von 10 Franken ausbezahlt. Bei genau zwei Treffern wird der Einsatz zusammen mit einem Gewinn von 1 Franken ausbezahlt.

g) Klara winkt ab und meint, das Spiel lohne sich für sie grundsätzlich nicht. Hat Klara richtig überlegt? Begründen Sie ihre Antwort mit einer passenden Rechnung.

Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen G = Gewinn von Klara:

k	10 CHF	1 CHF	-2 CHF
$P(G=k)$	$0.3^3 = \underline{0.027}$	$\binom{3}{2} \cdot 0.3^2 \cdot 0.7 = \underline{0.189}$	$1-0.027-0.189$ $= \underline{0.784}$

$$\mu = E(G) = 0.027 \cdot 10 + 0.189 \cdot 1 + 0.784 \cdot (-2) = -1.109 \underline{< 0}$$

Klara hat richtig überlegt, der zu erwartende Gewinn ist negativ, also ein **Verlust**.

	a	b	c	d	Punkte
Aufgabe 5 - Kombinatorik	0.5	1.5	1.5	2	**5.5**

Eine Sportklasse Sport Damen besteht aus 9 Schülerinnen der Klasse 6a und 6 Schülerinnen der Klasse 6b.

Zu Beginn der Sportstunde sollen sich alle Schülerinnen in einer Reihe aufstellen.

a) Wie viele Reihenfolgen sind möglich?

$\underline{\underline{15!}} \approx 1.3 \cdot 10^{12}$

b) Die vier Freundinnen Amina, Bea, Carmen und Dora wollen in der Reihe nebeneinander stehen. Wie viele Reihenfolgen sind möglich, bei denen das der Fall ist?

$$\underline{\underline{\underbrace{4!}_{ABCD} \cdot \underbrace{12!}_{(ABCD)\text{ und 11 Einzelne}}}} \approx 1.1 \cdot 10^{10} \quad \left[\text{oder: } \underbrace{12}_{\text{Position ABCD}} \cdot \underbrace{4!}_{ABCD} \cdot \underbrace{11!}_{\text{11 Einzelne}}\right]$$

c) Für ein Spiel werden 5 Schiedsrichterinnen ausgewählt. Drei sollen aus der Klasse 6a und zwei aus der Klasse 6b sein.
Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Auswahl der Schiedsrichterinnen?

$$\binom{9}{3} \cdot \binom{6}{2} = \underline{\underline{1260}}$$

d) Für eine letzte Übung soll die ganze Sportklasse in Dreiergruppen aufgeteilt werden.
Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Bildung der Gruppen?

$$\frac{\binom{15}{3} \cdot \binom{12}{3} \cdot \binom{9}{3} \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{3}}{5!} = \frac{168186000}{120} = \underline{\underline{1'401'400}}$$

Alternative Berechnungen:

$$\frac{15!}{(3!)^5 \cdot 5!} \quad \text{oder} \quad \underbrace{\binom{14}{2}}_{\text{Schülerin1 wählt 2 in ihre Dreiergruppe}} \cdot \binom{11}{2} \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{2}{2}$$