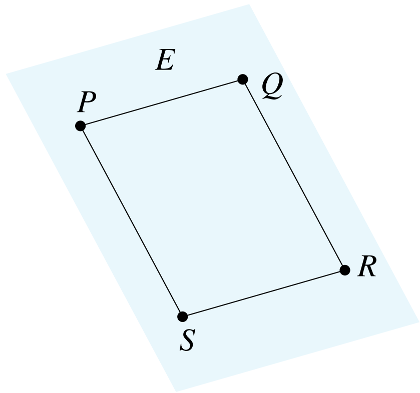
KANTON LUZERN
Bildungs- und Kulturdepartement

Kantonsschule Alpenquai Luzern

Schriftliche Maturitätsprüfung 2022

Fach	Mathematik
Prüfende Lehrpersonen	Lukas Fischer lukas.fischer@edulu.ch Edoardo Sassone edoardo.sassone@edulu.ch Roel Zuidema roel.zuidema@edulu.ch
Klassen	G18a / G18d / G18i
Prüfungsdatum	20. Mai 2022
Prüfungsdauer	3 Stunden
Erlaubte Hilfsmittel	• Formelsammlung «Formeln, Tabellen, Begriffe», DMK • Taschenrechner TI-30X Pro (ohne Handbuch)
Anweisungen zur Lösung der Prüfung	• Es wird Wert auf eine saubere Darstellung gelegt. • Jede Aufgabe soll auf einem neuen Bogen begonnen werden und muss einen vollständigen und nachvollziehbaren Lösungsweg enthalten. • Jeder Bogen ist mit dem Namen zu beschriften. • Der Einsatz der Hilfsmittel ist klar anzugeben.
Anzahl erreichbarer Punkte	Aufgabe 1: 10.5 Aufgabe 2: 10.5 Aufgabe 3: 12 Aufgabe 4: 12 Total: 45 Die Note 6 wird für mindestens 40 Punkte erteilt, die Note 4 für mindestens 23 Punkte.
Anzahl Seiten (inkl. Titelblatt)	5

	a	b	c	d	e	f	
Aufgabe 1: Vektorgeometrie	1.5	1	1	2	2	3	**10.5 Punkte**



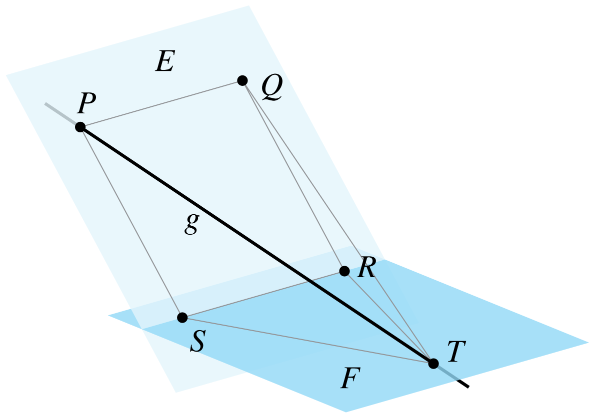
Gegeben sind die Punkte $P(2|15|-4)$, $Q(6|23|4)$ und $R(6|14|13)$ in der Ebene E.

a) i) Bestimmen Sie eine Parametergleichung der Ebene E.
ii) Welche der folgenden Koordinatengleichungen beschreibt die Ebene E? Geben Sie eine Begründung.

☐ $y - z = 19$ ☐ $x + 2y + 2z = 24$
☐ $-4x + y + z = 3$ ☐ $2x + y - 2z = 11$

b) Zeigen Sie, dass $\angle PQR = 90°$.

c) Bestimmen Sie die Koordinaten von S in der Ebene E, sodass das Viereck $PQRS$ ein Rechteck ist.



Die Gerade g durch P mit dem Richtungsvektor $\vec{r}_g = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$ enthält die Kante PT der Pyramide $PQRST$. Die Pyramidespitze T liegt in der Ebene $F: 2x + y - 2z = 0$.

d) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes T.

e) Bestimmen Sie den Schnittwinkel zwischen der Geraden g und der Ebene E.

f) Bestimmen Sie den Volumeninhalt der Pyramide $PQRST$.
Falls Sie bei d) die Koordinaten des Punktes T nicht gefunden haben, rechnen Sie weiter mit $T(14|3|11)$.

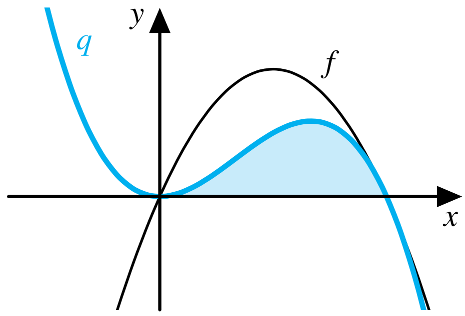
	a	b	c	d	e	
Aufgabe 2: Analysis	3	2	0.5	2	3	**10.5 Punkte**

a) Ein Polynom p dritten Grades hat ein Extremum im Ursprung und den Wendepunkt $W(2|2)$. Verwenden Sie diese Informationen zur Bestimmung der Funktionsgleichung des Polynoms p.

Die Abbildung zeigt den Graphen von

$$q(x) = -\frac{1}{16}x^2(x-6)$$

Die Funktion q ist eine vertikale Streckung von p.



b) Bestimmen Sie den Schnittwinkel unter dem der Graph von q die x-Achse an der positiven Nullstelle schneidet.

c) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Graphen von q und der x-Achse im 1. Quadranten eingeschlossen wird.

d) Der Graph einer nach unten geöffneten Parabel f schneidet den Graphen von q genau zwei Mal, und zwar an den Nullstellen (siehe Abbildung). Der Graph von q halbiert die Fläche, die von der Parabel f und der x-Achse eingeschlossen wird.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Parabel.

e) Im Hochpunkt des Polynoms q wird eine Tangente t an den Graphen gelegt. Die Fläche, die vom Graphen von q und der Tangenten t eingeschlossen wird, rotiert um die x-Achse.
Bestimmen Sie das Volumen des so erzeugten Rotationskörpers.

	a	b	c	d	
Aufgabe 3: Analysis	6	2	2	2	**12 Punkte**

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{x-1}{x^3}$ mit den Ableitungen

$$f'(x) = \frac{-2x+3}{x^4} \qquad f''(x) = \frac{6x-12}{x^5} \qquad f'''(x) = \frac{-24x+60}{x^6}$$

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich, die Nullstellen, die Extrema und Wendepunkte sowie die Asymptoten von f.
Zeichnen Sie auch den Graphen von f.

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangenten an den Graphen von f, die die y-Achse an der Stelle $y = -1$ schneidet.

c) Zeigen Sie, dass

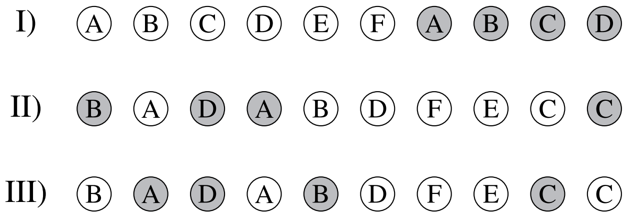
$$F(x) = \frac{-2x+1}{2x^2}$$

eine Stammfunktion von f ist und bestimmen Sie algebraisch den Inhalt der nach rechts unbeschränkten Fläche die von der x-Achse und vom Graphen von f beschränkt wird.

d) Für $u > 1$ wird ein Dreieck gebildet, bestehend aus der Nullstelle des Graphen von f, dem Punkt $P(u|0)$ und dem Punkt $Q(u|f(u))$ auf dem Graphen von f. Bestimmen Sie den Wert von u, für den der Flächeninhalt des Dreiecks maximal wird.

	a	b	c	d	e	f	
Aufgabe 4: Stochastik	2	2	2	2	2	2	**12 Punkte**

Sechs weisse und vier schwarze mit Buchstaben angeschriebene Kugeln werden in einer Reihe auf den Tisch gelegt. Rechts sind drei mögliche verschiedene Anordnungen dargestellt.



a) Bestimmen Sie die Anzahl verschiedene Anordnungen
   i) insgesamt,
   ii) wobei die schwarzen Kugeln nebeneinander liegen,
   iii) wobei die Buchstaben in alphabetischer Reihenfolge liegen.

b) Die Kugeln werden in einer Urne gemischt. Mit einem Griff werden drei Kugeln gezogen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass
   i) alle drei gezogenen Kugeln weiss sind,
   ii) ein Buchstabe doppelt gezogen wird?

Beim folgenden Experiment wird nur die Farbe der Kugeln betrachtet. Die Kugeln werden einzeln ohne Zurücklegen gezogen. Die Zufallsvariable Z bezeichnet die Anzahl Züge, die benötigt werden, bis alle vier schwarzen Kugeln gezogen sind.

z	4	5	6	7	8	9	10
$P(Z=z)$	$\frac{1}{210}$	$\frac{4}{210}$	$\frac{10}{210}$			$\frac{56}{210}$	$\frac{84}{210}$

c) In der oben dargestellten Wahrscheinlichkeitsverteilung fehlen einige Angaben. Bestimmen Sie
   i) $P(6 < Z < 9)$,
   ii) $P(Z = 7)$.

d) Zander möchte in maximal sechs Zügen alle vier schwarzen Kugeln ziehen.
Wie häufig sollte er dieses Experiment wiederholen, sodass ihm das mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% mindestens einmal gelingt?

e) Das Experiment wird 24 Mal wiederholt. Die Zufallsvariable R gibt an, wie häufig alle vier schwarzen Kugeln in maximal acht Zügen gezogen werden. Bestimmen Sie $P(R = 10)$.

f) Nun wird aus dem Experiment ein Spiel gemacht. Der Einsatz für eine Spielrunde beträgt 1 Franken. Zieht man in 6, 7 oder 8 Zügen alle vier schwarzen Kugeln werden 2 Franken ausbezahlt. Zieht man in weniger als 6 Zügen alle vier schwarzen Kugeln bekommt man den Hauptpreis ausbezahlt. Braucht man mehr als 8 Züge, wird nichts ausbezahlt.
Bestimmen Sie den Betrag, der als Hauptpreis ausbezahlt werden sollte, so dass der Spielbetreiber auf Dauer mit einem Gewinn von 10 Rappen pro Spielrunde rechnen kann.

Kurzlösungen

1

a) i) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 15 \\ -4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 17 \end{pmatrix}$

ii) $4x - y - z = -3$

c) $S(2|6|5)$

d) $T(14|0|14)$

e) $\gamma \approx 23{,}76°$

f) $V = 540$

2

a) $p(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2$

b) $\gamma \approx 66{,}04°$

c) $A = 6{,}75$

d) $f(x) = -\frac{3}{8}x^2 + \frac{9}{4}x$

e) $V \approx 52{,}11$

3

a) $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $N(1|0)$ $H\left(\frac{3}{2}\middle|\frac{4}{27}\right)$ $W\left(2\middle|\frac{1}{8}\right)$

V.A. $x = 0$ H.A. $y = 0$

b) $y = x - 1$

c) Fläche $= \frac{1}{2}$

d) $u = 3$

4

a) i) 3 628 800 ii) 120 960 iii) 16

b) i) $0{,}1\overline{6}$ ii) $0{,}2\overline{6}$

c) i) 0,262 ii) 0,095

d) $n \geq 41$

e) 0,114

f) CHF 11,80