

	a	b	
Aufgabe 2: Modularrechnen	4.5	1.5	6 Punkte

- a) Berechnen Sie $2^{4093} \bmod 4093$. Welche Rückschlüsse lässt das Resultat auf die Zahl 4093 zu? Begründen Sie ausführlich.
- b) Die Zahlen $p = 569$ und $q = 907$ sind Primzahlen (muss nicht gezeigt werden). Nun wird $55^{25 \cdot 568 \cdot 906} \bmod (569 \cdot 907)$ gerechnet. Welches Resultat erwarten Sie? Begründen Sie, ohne zu rechnen.

	a	b	c	d	
Aufgabe 3: Populationsmodelle	2	2	3	1	8 Punkte

Zur Bevölkerungsentwicklung des afrikanischen Staates Kamerun finden sich auf der Datenbank www.worldometers.info folgende Angaben:

Jahr	1995	2000	2005	2010	2015	2020
Bev. in Mio.	13.60	15.51	17.73	20.34	23.30	26.55

- a) Exponentielles Wachstum setzt voraus, dass der prozentuale Zuwachs der untersuchten Grösse in einem Zeitintervall stets gleich gross ist. Begründen Sie nachvollziehbar, warum die Bevölkerungszahlen Kameruns diesen Annahmen ziemlich gerecht werden.
- b) Welche Prognose für das Jahr 2050 ergäbe sich für die kamerunische Bevölkerung, wenn die Jahre 1995 und 2020 als Basis für die Berechnung verwendet werden und ein exponentielles Wachstum unterstellt wird?

Worldometer prognostiziert, dass Kameruns Bevölkerung im Jahr 2050 den Wert 50.6 Mio. erreicht. Dieser Rechnung wird somit nicht das Wachstum aus b) unterstellt. Nehmen wir an, dass Kameruns Bevölkerung heute noch (ungefähr) exponentiell wächst, dieses Wachstum jedoch in naher Zukunft verlässt und auf lange Frist hinaus den stabilen Wert von 80 Mio. annimmt.

- c) Modellieren Sie die Entwicklung von Kameruns Bevölkerung, indem Sie
- eine Funktion $f(t)$ berechnen, wobei f für die Bevölkerung in Mio. und t für die Anzahl Jahre ab 2020 steht,
 - eines der gängigen Populationsmodelle berücksichtigen und
 - die Bevölkerungsdaten für 2020 und 2050 benutzen.
- d) Vermag die in c) berechnete Funktion f rückwirkend die kamerunische Bevölkerung im Jahr 1995 gut zu modellieren? Begründen Sie Ihre Antwort.

	a	b	
Aufgabe 4: Differentialgleichungen	4.5	4.5	9 Punkte

Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Differentialgleichungen.

- a) $5y'(x) - 14y(x) = 148 \cos(2x) + 3x$
- b) $y'(x) - y \cdot \cos(x) = (x^2 - 2x + 1) \cdot e^{\sin(x)}$

	a	b	c	
Aufgabe 5: Komplexe Zahlen	2.5	4	1.5	8 Punkte

a) Gegeben sind die komplexen Zahlen $u = -1 - \sqrt{3}i$ und $v = 3e^{\pi/4 \cdot i}$. Bestimmen Sie $z_1 = u + v$ und $z_2 = \frac{1}{u}$ entweder in der Normal- oder in der Polarform.

b) Bestimmen Sie die komplexe(n) Lösung(en) der folgenden Gleichung ohne Taschenrechnerhilfe:

$$z^2 - 10iz + 2i - 25 = 0$$

c) Ein reguläres Sechseck ABCDEF hat den Mittelpunkt im Ursprung der Gauss'schen Zahlenebene und die Ecke $A = 1 - \sqrt{2}i$. Bestimmen Sie die übrigen Eckpunkte B und C in der Normalform.

	a	b	c	d	
Aufgabe 6: Statistischer Test	1	4	1	4	10 Punkte

Eine grosse, global tätige Firma mit mehreren Zehntausend Angestellten erwägt ein neues Design ihres Internetauftritts.

a) Vor einem Jahr bestand bei 60% der Angestellten der Wunsch nach einer neuen Webseite. Die Firmenleitung glaubt, dass es in der Zwischenzeit mehr sind. Bevor die aufwändigen Gestaltungsarbeiten in Auftrag gegeben werden, möchte die Firmenleitung diese Annahme überprüfen. Es sollen deshalb 100 zufällig ausgewählte Angestellte befragt werden. Die Firmenleitung bestimmt, dass sie die neue Webseite in Angriff nehmen wird, wenn mehr als 60 der Befragten dies möchten. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art?

b) Eine Mathematikerin, die von diesen Plänen hört, klärt die Firmenleitung darüber auf, dass die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art bei dem geplanten Testverfahren viel zu gross ist. Sie plädiert für einen sorgfältig durchgeführten statistischen Test (einseitig). Formulieren Sie die Hypothesen, definieren Sie die Testgrösse und die Entscheidungsregel für ein Signifikanzniveau von 1%. Welcher Schluss muss gezogen werden, wenn 68 der befragten Angestellten eine neue Webseite wünschen?

c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art, wenn sogar 75% eine neue Webseite wünschen?

d) Ein halbes Jahr später stellt das Gestaltungsteam eine vollständig neu gestaltete Firmenwebseite vor. Sie soll aufgeschaltet werden, wenn sie auf Zuspruch stösst. 200 Angestellte werden gefragt, ob sie die alte oder die neue Webseite besser finden. Formulieren Sie einen vollständigen Vorzeichentest (Hypothesen, Testgrösse, Entscheidungsregel) für ein Signifikanzniveau von 5%. Kann die Firmenleitung behaupten, die neue Webseite gefalle besser als die alte, wenn sich 120 der befragten Angestellten für die neue aussprechen?