KANTON LUZERN
Bildungs- und Kulturdepartement

Kantonsschule Alpenquai Luzern

Schriftliche Maturitätsprüfung 2021

Fach	Mathematik Grundlagenfach
Prüfende Lehrpersonen	Claudia Sänger claudia.saenger@edulu.ch Lukas Fischer lukas.fischer@edulu.ch Stefan Müller stefan.mueller@edulu.ch Marco Peter marco.peter@edulu.ch
Klassen	6a / 6c / 6e / 7s
Prüfungsdatum	25. Mai 2021
Prüfungsdauer	180 Minuten
Erlaubte Hilfsmittel	- «Formeln, Tabellen, Begriffe», DMK, DPK, DCK (2009) - Taschenrechner TI-30X Pro MultiView oder MathPrint (ohne Benutzerhandbuch)
Anweisungen zur Lösung der Prüfung	- Es wird Wert auf eine saubere Darstellung gelegt. - Jede Aufgabe soll einen vollständigen und nachvollziehbaren Lösungsweg enthalten. - Jede Aufgabe soll auf einem neuen Bogen begonnen werden. - Jeder Bogen ist mit dem Namen zu beschriften.
Anzahl erreichbarer Punkte	Aufgabe 1: 10.5 Aufgabe 2: 11.5 Aufgabe 3: 12.5 Aufgabe 4: 10.5 Total: 45 Für die Note 6 werden mindestens 39 Punkte benötigt.
Anzahl Seiten (inkl. Titelblatt)	6

……………………………………………………… ……………… ………………
Name, Vorname Klasse Nummer

	a	b	c	d	e	f	Punkte
Aufgabe 1 - Vektorgeometrie	1.5	2	1.5	1.5	2	2	**10.5**

Gegeben sind die Punkte A(1/1/1), B(3/3/1) und C(0/4/5), welche eine Ebene E festlegen.

a) Bestimmen Sie eine Parametergleichung der Ebene E.

b) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E.

c) Bestimmen Sie den Winkel α zwischen der Ebene E und der xy-Ebene.

d) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist.

e) Berechnen Sie den Flächeninhalt A des Dreiecks ABC.

f) Der Punkt S(6/-2/8) ist die Spitze einer Pyramide mit der Grundfläche ABC. Berechnen Sie das Volumen V dieser Pyramide.

	a_1	a_2	b	c	d	**Punkte**
Aufgabe 2 – Analysis	1	5.5	1.5	1.5	2	**11.5**

Gegeben ist die Funktion: $f(x)=\dfrac{-x^2+x+2}{x^2}$

mit den Ableitungen: $f'(x)=\dfrac{-x-4}{x^3}$ $f''(x)=\dfrac{2x+12}{x^4}$ und $f'''(x)=\dfrac{-6x-48}{x^5}$.

a_1) Zeigen Sie rechnerisch, dass $f'(x)=\dfrac{-x-4}{x^3}$ die erste Ableitung von $f(x)$ ist.

a_2) Diskutieren Sie die Funktion $f(x)$, d.h. geben Sie den Definitionsbereich an, bestimmen Sie die Nullstellen, Hoch- und Tief-, sowie Wendepunkte und auch die Asymptoten. Zeichnen Sie mit den erhaltenen Daten den Graphen der Funktion.

b) Zeigen Sie rechnerisch, dass $F(x)=\dfrac{-x^2+x\cdot\ln(x)-2}{x}$ für $x\in\mathbb{R}^+$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist und berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von der x-Achse, dem Graphen von $f(x)$ und der Geraden $x=1$ eingeschlossen wird.

c) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente, die den Graphen von $f(x)$ bei der positiven Nullstelle berührt.

d) Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel $p(x)$, die die gleichen Nullstellen wie $f(x)$ hat. Zudem schneiden sich die Graphen von $f(x)$ und $p(x)$ in der positiven Nullstelle in einem rechten Winkel.

	a_1	a_2	b	c	d	e	**Punkte**
Aufgabe 3 – Analysis	3.5	0.5	1	1	4	2.5	**12.5**

Gegeben sei die Funktionenschar: $f_a(x)=\frac{1}{a^4}x^3-\frac{4}{a^3}x^2+\frac{4}{a^2}x, \quad (a>0)$.

a_1) Bestimmen Sie die Gleichung des Polynoms dritten Grades, das die x-Achse an der Stelle $x=2$ berührt und im Ursprung diese mit einer Steigung von 4 schneidet.

a_2) Zeigen Sie, dass es sich bei der gefundenen Funktion um eine Funktion aus der Schar $f_a(x)$ handelt. Welchen Wert hat a?

Sei nun $a=1$, d.h.: wir betrachten $f_1(x)=x^3-4x^2+4x$.

b) Skizzieren Sie den qualitativ richtigen Verlauf der Funktion mit Hilfe der Nullstellen. (Extrema und Wendepunkte müssen nicht bestimmt werden!)

c) Die Fläche F wird vom Graphen der Funktion $f_1(x)$ und der x-Achse eingeschlossen. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche F.

d) Das Dreieck ORS liegt in der Fläche F, mit den Punkten R$(u/0)$, S$(u/f_1(u))$ und O$(0/0)$. Bestimmen Sie den Punkt S so, dass der Flächeninhalt des Dreiecks maximal ist und geben Sie auch den maximalen Flächeninhalt des Dreiecks an.

Wir betrachten nun die allgemeine Funktion: $f_a(x)=\frac{1}{a^4}x^3-\frac{4}{a^3}x^2+\frac{4}{a^2}x, \ (a>0)$.

e_1) Zeigen Sie, dass $x_1=0$ und $x_2=2a$ die Nullstellen von $f_a(x)$ sind.

e_2) Zeigen Sie, dass der Inhalt der Fläche, die die Funktion mit der x-Achse im 1. Quadranten einschliesst, immer gleich gross ist, unabhängig von der Wahl von a.

	a	b	c	d	e	f	g	Punkte
Aufgabe 4 – Stochastik	0.5	1	2.5	1	1	2	2.5	**10.5**

In einer Zuckerfabrik wird der Zucker in Packungen zu 100 g, 250g, 500g, 1kg und 2,5kg abgefüllt. Nun soll das Sortiment in verschiedenen Schaukästen ausgestellt werden.

a) Im ersten Schaukasten soll vom kompletten Sortiment je eine Packung ausgestellt werden. Diese sollen in einer Reihe nebeneinanderstehen. Auf wie viele verschiedene Arten ist das möglich?

b) Da der zweite Schaukasten kleiner ist, können dort nur 3 Packungen ausgestellt werden. Es sollen 3 verschiedene Packungen aus dem Sortiment in einer Reihe im Schaukasten nebeneinanderstehen. Auf wie viele verschiedene Arten ist das möglich?

c) Der dritte Schaukasten ist der grösste. Es sollen darin eine 2,5kg-Packung und je zwei gleiche Packungen der übrigen Grössen nebeneinandergestellt werden.

   i) Auf wie viele Arten ist das möglich?
   ii) Mit welcher Wahrscheinlichkeit steht die 2,5kg-Packung unmittelbar zwischen den beiden 1kg-Packungen, wenn die Anordnung zufällig erfolgt?

Beim Verpacken der Packungen wird in jede zehnte Packung ein Gutschein gelegt und durch den Transport und die Verteilung werden die Packungen zufällig gemischt.

d) Sabine und Rolf kaufen 20 1kg-Packungen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben sie mindestens einen Gutschein?

e) Sabine und Rolf kaufen nun 100 1kg-Packungen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhalten sie mindestens drei Gutscheine?

f) Wie viele 1kg-Packungen müssten die beiden mindestens kaufen, damit sie mindestens einen Gutschein mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% erhalten?

Sabine und Rolf haben einen Gutschein erhalten und je eine Schachtel Pralinen gewonnen. Sabine schlägt vor, ein Spiel zu spielen. Sie zeichnet auf ein Blatt 6 Felder und beschriftet sie mit den Zahlen 1 bis 6. Rolf soll nun ein Feld auswählen, auf das er eine Praline legt. Dann soll er 3 Würfel werfen.

- Erscheint die Zahl des gewählten Feldes nicht, so erhält Sabine Rolfs Praline.
- Erscheint die Zahl des gewählten Feldes einmal, so erhält er seine Praline zurück und ausserdem zusätzlich eine Praline von Sabine.
- Erscheint die Zahl des gewählten Feldes zweimal, so erhält er seine Praline zurück und ausserdem zusätzlich zwei Pralinen von Sabine.
- Erscheint die Zahl des gewählten Feldes dreimal, so erhält er seine Praline zurück und ausserdem zusätzlich drei Pralinen von Sabine.

g) Wie hoch ist der durchschnittliche Gewinn oder Verlust von Rolf bei dem Spiel, wenn man von einem unbegrenzten Vorrat an Pralinen ausgeht?

Lösungen - Schriftliche Maturitätsprüfung 2021

Fach	Mathematik Grundlagenfach
Prüfende Lehrpersonen	Claudia Sänger claudia.saenger@edulu.ch Lukas Fischer lukas.fischer@edulu.ch Stefan Müller stefan.mueller@edulu.ch Marco Peter marco.peter@edulu.ch
Klassen	6a / 6c / 6e / 7s
Prüfungsdatum	25. Mai 2021
Prüfungsdauer	180 Minuten
Erlaubte Hilfsmittel	- «Formeln, Tabellen, Begriffe», DMK, DPK, DCK (2009) - Taschenrechner TI-30X Pro MultiView oder MathPrint (ohne Benutzerhandbuch)
Anweisungen zur Lösung der Prüfung	- Es wird Wert auf eine saubere Darstellung gelegt. - Jede Aufgabe soll einen vollständigen und nachvollziehbaren Lösungsweg enthalten. - Jede Aufgabe soll auf einem neuen Bogen begonnen werden. - Jeder Bogen ist mit dem Namen zu beschriften
Anzahl erreichbarer Punkte	Aufgabe 1: 10.5 Aufgabe 2: 11.5 Aufgabe 3: 12.5 Aufgabe 4: 10.5 Total: 45 Für die Note 6 werden mindestens 39 Punkte benötigt
Anzahl Seiten (inkl. Titelblatt)	12

	a	b	c	d	e	f	Punkte
Aufgabe 1 - Vektorgeometrie	1.5	2	1.5	1.5	2	2	**10.5**

Gegeben sind die Punkte A(1/1/1), B(3/3/1) und C(0/4/5), welche eine Ebene E festlegen.

a) Bestimmen Sie eine Parametergleichung der Ebene E.

$$E:\ \vec{r}=\vec{r_A}+s\cdot\overrightarrow{AB}+t\cdot\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-1\\3\\4\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{\vec{r}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-1\\3\\4\end{pmatrix}}}$$

b) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E.

Ansatz $\mathrm{E}:\ ax+by+cz=12$

Punkte A, B und C einsetzen:

$$\begin{array}{ll} A(1/1/1)\in E & \Rightarrow \\ A(3/3/1)\in E & \Rightarrow \\ A(0/4/5)\in E & \Rightarrow \end{array}\left|\begin{array}{lllllll} a & + & b & + & c & = & 12 \\ 3a & + & 3b & + & c & = & 12 \\ & & 4b & + & 5c & = & 12 \end{array}\right| \quad \Leftrightarrow \quad a=12,\ b=-12,\ c=12$$

$$\underline{\underline{E:\ x-y+z=1}}$$

Alternativen:

- Elimination der Parameter in a) oder
- Normalenvektor $\vec{n_E}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ mit Skalar- oder Vektorprodukt und

$$A(1/1/1)\ \text{in}\ \ x-y+z=d\ \Rightarrow\ d=1\ \Rightarrow\ \underline{E:\ x-y+z=1}$$

c) Bestimmen Sie den Winkel α zwischen der Ebene E und der xy-Ebene.

$$\alpha=\sphericalangle\left(\vec{n_E},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)=\sphericalangle\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

$$\alpha=\arccos\left(\left|\frac{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{1}}\right|\right)=\arccos\left(\left|\frac{1}{\sqrt{3}}\right|\right)\approx\underline{\underline{54.74^\circ}}$$

d) [1.5] ***Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist.***

$$|\overrightarrow{AB}|=\left|\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}\right|=\sqrt{8},\ |\overrightarrow{BC}|=\left|\begin{pmatrix}-3\\1\\4\end{pmatrix}\right|=\sqrt{26},\ |\overrightarrow{AC}|=\left|\begin{pmatrix}-1\\3\\4\end{pmatrix}\right|=\sqrt{26}$$

Das Dreieck ist **gleichschenklig** (Schenkellänge = $\sqrt{26}$) und hat die Basis AB.

e) [2] ***Berechnen Sie den Flächeninhalt A des Dreiecks ABC.***

A(1/1/1), B(3/3/1) und C(0/4/5)

Der Mittelpunkt der Basis AB ist $\underline{M(2/2/1)}$.

Da das Dreieck gleichschenklig ist, gilt für die Länge der Höhe auf AB:

$$h=|\overrightarrow{CM}|=\left|\begin{pmatrix}2\\-2\\-4\end{pmatrix}\right|=\sqrt{24}=\underline{2\sqrt{6}}\ [\approx 4.90]$$

Der Flächeninhalt A des Dreiecks beträgt also:

$$\underline{\underline{A}}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|\cdot h=\frac{1}{2}\sqrt{8}\cdot 2\sqrt{6}=\sqrt{48}=\underline{\underline{4\sqrt{3}}}\ [\approx 6.93]$$

f) ***Der Punkt S(6/-2/8) ist die Spitze einer Pyramide mit der Grundfläche ABC. Berechnen Sie das Volumen V dieser Pyramide.***

Wir bestimmen die Pyramidenhöhe h als Abstand von S(6/-2/8) zur Ebene $E:\ x-y+z=1$

Gleichung der Normalen n zu E durch S: $\underline{n:\ \vec{r}=\begin{pmatrix}6\\-2\\8\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}}$

$n\cap E=\{N\}$:

$(6+t)-(-2-t)+(8+t)=1 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{t=-5}$, also $\underline{N(1/3/3)}$ und somit

$$\underline{h=}\ |\overrightarrow{NS}|=\left|\begin{pmatrix}5\\-5\\5\end{pmatrix}\right|=\sqrt{75}=\underline{5\sqrt{3}}\ [\approx 8.66]$$

$$V=\frac{1}{3}Ah=\frac{1}{3}\cdot 4\sqrt{3}\cdot 5\sqrt{3}=\underline{\underline{20}}$$

Alternativ mit Spatprodukt

$$V=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AS}\right)\right|=\frac{1}{6}\left(\left(\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\3\\4\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}5\\-3\\7\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{6}\left(\begin{pmatrix}8\\-8\\8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\-3\\7\end{pmatrix}\right)=\frac{40+24+56}{6}=20$$

	a_1	a_2	b	c	d	Punkte
Aufgabe 2 – Analysis	1	5.5	1.5	1.5	2	**11.5**

Gegeben ist die Funktion: $f(x)=\dfrac{-x^2+x+2}{x^2}$

mit den Ableitungen: $f'(x)=\dfrac{-x-4}{x^3}$ $\quad f''(x)=\dfrac{2x+12}{x^4}$ ***und*** $f'''(x)=\dfrac{-6x-48}{x^5}$ ***.***

a_1) Zeigen Sie rechnerisch, dass $f'(x)=\dfrac{-x-4}{x^3}$ ***die erste Ableitung von*** $f(x)$ ***ist.***

$$y=f(x)=\frac{-x^2+x+2}{x^2}$$

$$f'(x)=\frac{(-2x+1)\cdot x^2-(-x^2+x+2)\cdot 2x}{x^4}=\frac{-2x^3+x^2+2x^3-2x^2-4x}{x^4}$$
$$=\frac{-x^2-4x}{x^4}=\frac{-x-4}{x^3}$$

oder: $f(x)=\dfrac{-x^2+x+2}{x^2}=-1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2} \quad\Rightarrow\quad f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{4}{x^3}=\dfrac{-x-4}{x^3}$

a_2) Diskutieren Sie die Funktion $f(x)$***, d.h. geben Sie den Definitionsbereich an, bestimmen Sie die Nullstellen, Hoch- und Tief-, sowie Wendepunkte und auch die Asymptoten. Zeichnen Sie mit den erhaltenen Daten den Graphen der Funktion.***

Definitionsbereich: $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Nullstellen: $f(x)=\dfrac{-x^2+x+2}{x^2}=\dfrac{-(x-2)(x+1)}{x^2}=0 \quad\Rightarrow\quad x=-1 \text{ oder } x=2$

$N_1(-1/0),\ N_2(2/0)$

Extrema: $f'(x)=\dfrac{-x-4}{x^3}=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=-4$

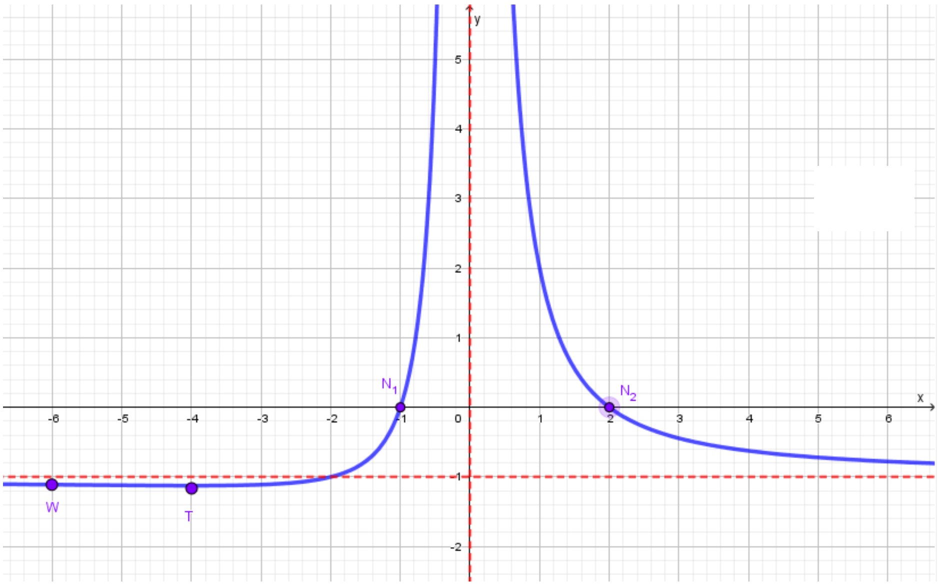
$f''(-4)=\dfrac{1}{64}>0 \quad\Rightarrow\quad T\left(-4/-\dfrac{9}{8}\right)$

Wendepunkte: $f''(x)=\dfrac{2x+12}{x^4}=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=-6$

$f'''(-6)=\dfrac{-28}{(-6)^5}\neq 0 \quad\Rightarrow\quad W\left(-6/\dfrac{-10}{9}\right)$

Asymptoten: vertikal: $x=0$, horizontal: $y=-1$:

Graph:



b) Zeigen Sie rechnerisch, dass $F(x)=\frac{-x^2+x\cdot\ln(x)-2}{x}$ für $x\in\mathbb{R}^+$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist und berechnen Sie den Flächeninhalt, die von der x-Achse, dem Graphen von $f(x)$ und der Geraden $x=1$ eingeschlossen wird.

$$F(x)=\frac{-x^2+x\cdot\ln(x)-2}{x}=-x+\ln(x)-\frac{2}{x}$$

$$F'(x)=-1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}=\frac{-x^2+x+2}{x^2}$$

$$A=\int_1^2\frac{-x^2+x+2}{x^2}\,dx=\left[-x+\ln(x)-\frac{2}{x}\right]_1^2=-2+\ln(2)-1-(-1+\ln(1)-2)=\ln(2)$$

c) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangenten, die den Graphen von $f(x)$ an der positiven Nullstelle berührt.

Steigung des Graphen an der positiven Nullstelle: $f'(2)=-\frac{3}{4}$

Tangente an der Nullstelle: $N_2(2|0)$: $t_2: y=-\frac{3}{4}\cdot(x-(2))+(0)=-\frac{3}{4}x+\frac{3}{2}$

d) Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel $p(x)$, die die gleichen Nullstellen wie $f(x)$ hat. Zudem schneiden sich die Graphen von $f(x)$ und $p(x)$ in der positiven Nullstelle in einem rechten Winkel.

Ansatz: $p(x) = a \cdot (x-2) \cdot (x+1) = ax^2 - ax - 2a$

$p'(x) = 2ax - a$

$$f'(2) \cdot p'(2) = \frac{-((2)+4)}{2^3} \cdot (2a(2) - a) = -1$$

$$-\frac{3}{4} \cdot 3a = -1$$

$$a = \frac{4}{9}$$

$$p(x) = \frac{4}{9} \cdot (x-2) \cdot (x+1) = \frac{4}{9}x^2 - \frac{4}{9}x - \frac{8}{9}$$

Alternativ

Ansatz: $p(x) = ax^2 + bx + c$

Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rl} NS\ x_1 = -1 & \Rightarrow \\ NS\ x_2 = 2 & \Rightarrow \\ f'(2) \cdot p'(2) = -1 & \Rightarrow \end{array} \left| \begin{array}{r} a - b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 0 \\ \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot 3a = -1 \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{r} a - b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 0 \\ a = \frac{4}{9} \end{array} \right| \Rightarrow a = \frac{4}{9},\ b = -\frac{4}{9},\ c = -\frac{8}{9}$$

	a_1	a_2	b	c	d	e	**Punkte**
Aufgabe 3 – Analysis	3.5	0.5	1	1	4	2.5	**12.5**

Gegeben sei die Funktionenschar: $f_a(x)=\frac{1}{a^4}x^3-\frac{4}{a^3}x^2+\frac{4}{a^2}x$, $(a>0)$.

a_1) Bestimmen Sie die Gleichung des Polynoms dritten Grades, das die x-Achse an der Stelle $x=2$ berührt und im Ursprung diese mit einer Steigung von 4 schneidet.

Ansatz:
$$p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$
$$p'(x)=3ax^2+2bx+c$$

Graph im Ursprung mit der Steigung 4
$$p(0)=d=0$$
$$p'(0)=c=4$$

Polynom berührt die *x*-Achse in $x=2$:
$$p(2)=\quad 8a+4b+8=0 \quad I$$
$$p'(2)=12a+4b+4=0 \quad II$$

$$II-I: 4a-4=0 \quad \Rightarrow a=1$$
$$a \text{ in } i: \qquad b=-4$$

$$\Rightarrow \quad p(x)=x^3-4x^2+4x$$

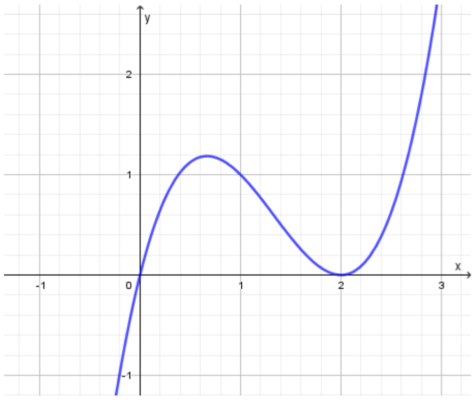
a_2) Zeigen Sie, dass es sich bei der gefundenen Funktion um eine Funktion aus der Schar $f_a(x)$ handelt. Welchen Wert hat a?

$$p(x)=x^3-4x^2+4x=\frac{1}{(1)^4}x^3-\frac{4}{(1)^3}x^2+\frac{4}{(1)^2}x \quad \Rightarrow a=1$$

Sei nun $a = 1$, d.h.: wir betrachten $f_1(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$.

b) Skizzieren Sie den qualitativ richtigen Verlauf der Funktion mit Hilfe der Nullstellen. (Extrema und Wendepunkte müssen nicht bestimmt werden!)

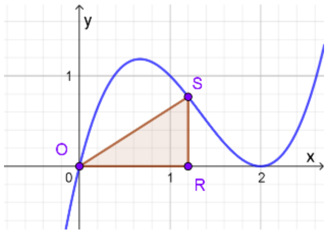
Nullstellen: $f_1(x) = x^3 - 4x^2 + 4x = x \cdot (x-2)^2 = 0 \iff x = 0 \text{ oder } x = 2$



c) Die Fläche F wird vom Graphen der Funktion $f_1(x)$ und der x-Achse eingeschlossen. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche F.

Fläche: $A(F) = \int_0^2 x \cdot (x-2)^2 dx = \int_0^2 (x^3 - 4x^2 + 4x) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + 2x^2 \right]_0^2 = \frac{4}{3}$

d) Das Dreieck ORS liegt in der Fläche F, mit den Punkten R$(u/0)$, S$\left(u/f_1(u)\right)$ und O$(0/0)$. Bestimmen Sie den Punkt S so, dass der Flächeninhalt des Dreiecks maximal ist und geben Sie auch den maximalen Flächeninhalt des Dreiecks an.



Zu maximieren: $A(u)=\frac{1}{2}\cdot u\cdot f_1(u)=\frac{1}{2}\cdot u\cdot\left(u^3-4u^2+4u\right)=\frac{1}{2}u^4-2u^3+2u^2$

Bestimme Extrema:

$$A'(u)=2u^3-6u^2+4u=0$$
$$2u\left(u^2-3u+2\right)=0$$
$$2u(u-1)(u-2)=0$$
$$u=0 \text{ oder } u=1 \text{ oder } u=2$$

Einziger Kandidat: $u=1$:

$$A''(u)=6u^2-12u+4$$
$$A''(1)=6(1)^2-12(1)+4=-2<0$$

Maximum an der Stelle $u=1$.

$$A(1)=\frac{1}{2}(1)^4-2(1)^3+2(1)^2=\frac{1}{2}$$

Für $S(1/1)$

wird der Flächeninhalt maximal, $A_{\max}=\frac{1}{2}$

Wir betrachten nun die allgemeine Funktion: $f_a(x)=\frac{1}{a^4}x^3-\frac{4}{a^3}x^2+\frac{4}{a^2}x$, $(a>0)$.

e₁) Zeigen Sie, dass $x_1=0$ und $x_2=2a$ die Nullstellen von $f_a(x)$ sind.

$$f_a(0)=\frac{1}{a^4}0^3-\frac{4}{a^3}0^2+\frac{4}{a^2}0=0$$

$$f_a(2a)=\frac{1}{a^4}(2a)^3-\frac{4}{a^3}(2a)^2+\frac{4}{a^2}2a=$$
$$=\frac{8a^3}{a^4}-\frac{16a^2}{a^3}+\frac{8a}{a^2}=\frac{8}{a}-\frac{16}{a}+\frac{8}{a}=0$$

e₂) Zeigen Sie, dass der Inhalt der Fläche, die die Funktion mit der x-Achse im 1. Quadranten einschliesst, immer gleich gross ist, unabhängig von der Wahl von a.

$$A=\int_0^{2a}\left(\frac{1}{a^4}x^3-\frac{4}{a^3}x^2+\frac{4}{a^2}x\right)dx=\frac{1}{a^4}\left[\frac{x^4}{4}-\frac{4ax^3}{3}+2a^2x^2\right]_0^{2a}$$
$$=\frac{1}{a^4}\frac{(2a)^4}{4}-\frac{4a(2a)^3}{3}+2a^2(2a)^2=\frac{4}{3}$$

	a	b	c	d	e	f	g	Punkte
Aufgabe 4 – Stochastik	0.5	1	2.5	1	1	2	2.5	**10.5**

In einer Zuckerfabrik wird der Zucker in Packungen zu 100 g, 250g, 500g, 1kg und 2,5kg abgefüllt. Nun soll das Sortiment in verschiedenen Schaukästen ausgestellt werden

a) ***Im ersten Schaukasten soll vom kompletten Sortiment je eine Packung ausgestellt werden. Diese sollen in einer Reihe nebeneinanderstehen. Auf wie viele verschiedene Arten ist das möglich?***

5 verschiedene Packungen

$P_{oW}(5) = 5! = \underline{\underline{120}}$

b) ***Da der zweite Schaukasten kleiner ist, können dort nur 3 Packungen ausgestellt werden. Es sollen 3 verschiedene Packungen aus dem Sortiment in einer Reihe im Schaukasten nebeneinanderstehen. Auf wie viele verschiedene Arten ist das möglich?***

3 aus 5 Packungen auswählen und diese dann nebeneinander anordnen

$\binom{5}{3} \cdot 3! = 10 \cdot 6 = \underline{\underline{60}}$ Oder nacheinander die Stellen besetzen: $5 \cdot 4 \cdot 3 = \underline{\underline{60}}$

c) ***Der dritte Schaukasten ist der grösste. Es sollen darin eine 2,5kg-Packung und je zwei gleiche Packungen der übrigen Grössen nebeneinandergestellt werden.***

i) ***Auf wie viele Arten ist das möglich?***

5 verschiedene Packungen, 4 davon je 2 mal $\rightarrow$ 9 Plätze

$$P_{mW} = \frac{9!}{2!2!2!2!} = \underline{\underline{22680}}$$

ii) ***Mit welcher Wahrscheinlichkeit steht die 2,5kg-Packung unmittelbar zwischen den beiden 1kg-Packungen, wenn die Anordnung zufällig erfolgt?***

Ereignis A : Die 2,5 kg Packung steht unmittelbar zwischen den beiden 1 kg Packungen Elemente, die angeordnet werden:

Block $\boxed{\text{1 kg} \mid \text{2,5 kg} \mid \text{1kg}}$, 2 mal 100 g, 2 mal 250 g und 2 mal 500 g $\rightarrow$ 7 Plätze

$$|A| = P_{mW} = \frac{7!}{2!2!2!} = \underline{\underline{630}}$$

$$|\Omega| = 22680$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{630}{22680} = 0,028 = \underline{\underline{2,8\%}}$$ (Laplace)

Beim Verpacken der Packungen wird in jede zehnte Packung ein Gutschein gelegt und durch den Transport und die Verteilung werden die Packungen zufällig gemischt.

d) Sabine und Rolf kaufen 20 1kg-Packungen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben sie mindestens einen Gutschein?

X ist Anzahl der erhaltenen Gutscheine

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{20}{0} \cdot 0,1^0 \cdot 0,9^{20} = 0,8784 = \underline{\underline{87,84\%}}$$

e) Sabine und Rolf kaufen nun 100 1kg-Packungen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhalten sie mindestens drei Gutscheine?

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - F_{0,1}^{100}(2) = 1 - 0,0019 = 0,9981 = \underline{\underline{99,81\%}}$$

f) Wie viele 1kg-Packungen müssten die beiden mindestens kaufen, damit sie mindestens einen Gutschein mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% erhalten?

$$P(X \geq 1) \geq 95\%$$

$$1 - P(X = 0) \geq 0,95$$
$$0,05 \geq P(X = 0)$$
$$0,05 \geq \binom{n}{0} \cdot 0,1^0 \cdot 0,9^n$$
$$0,05 \geq 0,9^n$$
$$n \geq \log_{0,9}(0,05)$$
$$n \geq 28,4$$

Die beiden müssen mindestens 29 Packungen kaufen.

Sabine und Rolf haben einen Gutschein erhalten und je eine Schachtel Pralinen gewonnen. Sabine schlägt vor, ein Spiel zu spielen. Sie zeichnet auf ein Blatt 6 Felder und beschriftet sie mit den Zahlen 1 bis 6. Rolf soll nun ein Feld auswählen, auf das er eine Praline legt. Dann soll er 3 Würfel werfen.

- ***Erscheint die Zahl des gewählten Feldes nicht, so erhält Sabine Rolfs Praline.***
- ***Erscheint die Zahl des gewählten Feldes einmal, so erhält er seine Praline zurück und ausserdem zusätzlich eine Praline von Sabine.***
- ***Erscheint die Zahl des gewählten Feldes zweimal, so erhält er seine Praline zurück und ausserdem zusätzlich zwei Pralinen von Sabine.***
- ***Erscheint die Zahl des gewählten Feldes dreimal, so erhält er seine Praline zurück und ausserdem zusätzlich drei Pralinen von Sabine.***

g) Wie hoch ist der durchschnittliche Gewinn oder Verlust von Rolf bei dem Spiel, wenn man von einem unbegrenzten Vorrat an Pralinen ausgeht?

Gewinnspiel
X ist die Anzahl der gewonnenen Pralinen von Rolf

Wahrscheinlichkeitsverteilung:

x_i	-1	1	2	3
$P(X=x_i)$	$B_{3;\frac{1}{6}}(0)=\left(\frac{5}{6}\right)^3$ $=0,578$	$B_{3;\frac{1}{6}}(1)$ $=3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^1\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2$ $=0,347$	$B_{3;\frac{1}{6}}(2)$ $=3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^1$ $=0,070$	$B_{3;\frac{1}{6}}(3)=\left(\frac{1}{6}\right)^3$ $=0,005$

$$E(X)=(-1)\cdot 0,578+1\cdot 0,347+2\cdot 0,070+3\cdot 0,005=\underline{\underline{-0,076}}$$

(7.87% ohne Rundung)