KANTON LUZERN
Bildungs- und Kulturdepartement

Kantonsschule Alpenquai Luzern

Schriftliche Maturitätsprüfung 2020

Fach	Grundlagenfach Mathematik
Prüfende Lehrpersonen	Essodinam Alitiloh essodinam.alitiloh@edulu.ch Sibille Burkard sibille.burkard@edulu.ch Anja Handschin anja.handschin@edulu.ch Claudia Sänger claudia.saenger@edulu.ch
Klassen	6a, 6c, 6g, 6i
Prüfungsdatum	Freitag, 15. Mai 2020
Prüfungsdauer	180 Minuten
Erlaubte Hilfsmittel	- Formelsammlung «Formeln, Tabellen, Begriffe» - Taschenrechner: TI-30X Pro MV (ohne Handbuch), (oder vergleichbarer Rechner)
Anweisungen zur Lösung der Prüfung	- Es wird Wert auf eine saubere Darstellung gelegt. - Jede Aufgabe soll einen vollständigen und nachvollziehbaren Lösungsweg enthalten. - Jede Aufgabe soll auf einem neuen Bogen begonnen werden. - Jeder Bogen ist mit dem Namen zu beschriften.
Anzahl erreichbarer Punkte	Aufgabe 1: 12 Aufgabe 2: 10 Aufgabe 3: 11 Aufgabe 4: 12 Total: 45 Linearer Bewertungsmassstab: Note 6.0 bei mindestens 41 Punkten Note 4.0 bei mindestens 24 Punkten
Anzahl Seiten (inkl. Titelblatt)	6

	a	b	c	d	Punkte
Aufgabe 1 – Analysis	4.5	2	2	3.5	**12**

Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = -x^3 + 5x^2 - 7x + 3$.

a) Berechnen Sie die Nullstellen von f, die Koordinaten der Extrem- und Wendepunkte des Graphen von f und zeichnen Sie anschliessend mit Hilfe dieser Punkte den Graphen von f (1 Einheit = 4 Häuschen).

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente t und die Gleichung der Normalen n an den Graphen von f an der Stelle $x = 2$.

c) Gegeben ist zudem die Funktion g mit der Funktionsgleichung $g(x) = -7x \cdot cos(x)$. Bestimmen Sie die Ableitungsfunktion g' und zeigen Sie, dass die Graphen der beiden Funktionen f und g an der Stelle $x = 0$ parallele Tangenten haben.

d) Von einem Rechteck $ABCD$ ist der Punkt A(1 | 0) gegeben. Der Punkt B liegt ebenfalls auf der x-Achse und hat die Koordinaten B(u | 0) für $u \geq 1$. Der Punkt C soll auf dem Graphen der Funktion f liegen. Berechnen Sie u so, dass das Rechteck $ABCD$ maximalen Flächeninhalt hat. Bestimmen Sie auch den Flächeninhalt dieses Rechtecks.

	a	b	c	d	e	f	**Punkte**
Aufgabe 2 – Analysis	1	1.5	2	0.5	2.5	2.5	**10**

Gegeben sind folgende Funktionen:

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-5x+2$$

$$g(x)=\frac{10}{x+5}$$

$$h(x)=4xe^{-\frac{1}{6}x^2}$$

a) Bestimmen Sie die Definitionsmengen der Funktionen f, g und h.

b) Bestimmen Sie alle Stammfunktionen der Funktionen f und g und zeigen Sie, dass $H(x)=-12e^{-\frac{1}{6}x^2}$ eine Stammfunktion von h ist.

c) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph der Funktion f und die x-Achse miteinander einschliessen.

d) Berechnen Sie das Integral von g über dem Intervall $I=[0,5]$.

e) Der Graph der Funktion h, die x-Achse und die Gerade $x=b$ (mit $b>0$) schliessen im ersten Quadranten eine Fläche ein.

e₁) Berechnen Sie den Inhalt $A(b)$ dieser Fläche in Anhängigkeit von b.

e₂) Berechnen Sie $A(b)$ für $b\to\infty$.

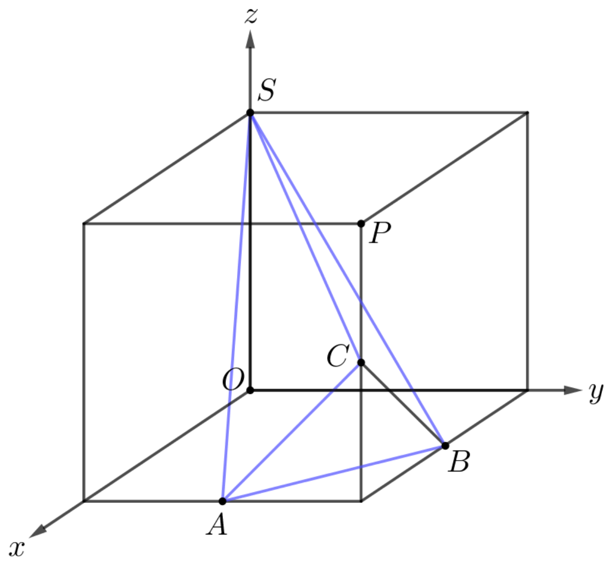
f) Das Flächenstück zwischen der Horizontalen durch den Punkt $P(0\,|\,1)$ und dem Graphen von g rotiert auf dem Intervall $[-3,2]$ um die x-Achse.

f₁) Skizzieren Sie den Graphen von g und schraffieren Sie das oben beschriebene Flächenstück.

f₂) Berechnen Sie mit dem Taschenrechner, ohne Angabe einer Stammfunktion das Volumen des entstehenden Rotationskörpers.

	a	b	c	d	e	f	Punkte
Aufgabe 3 – Vektorgeometrie	1	1.5	1.5	2.5	2.5	2	**11**

In einem Würfel mit den Eckpunkten $O(0\,|\,0\,|\,0)$, $P(10\,|\,10\,|\,10)$ und $S(0\,|\,0\,|\,10)$ befindet sich eine Pyramide mit einem Dreieck als Grundfläche und der Spitze S. Die Eckpunkte A, B und C der Pyramidengrundfläche sind gegeben durch $A(10\,|\,6\,|\,0)$, $B(6\,|\,10\,|\,0)$ und $C(10\,|\,10\,|\,5)$.



a) Bestimmen Sie eine Parametergleichung der Ebene E, welche die Punkte A, B und C enthält.

b) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E.

Verwenden Sie im Folgenden $E\colon\ 5x+5y-4z=80$.

c) Berechnen Sie den spitzen Winkel α, den die Ebene E mit der xy-Ebene einschliesst.

d) Weisen Sie rechnerisch nach, dass es sich beim Dreieck ABC um ein gleichschenkliges Dreieck handelt und berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

e) Berechnen Sie die Koordinaten des Lotfusspunkts L von S in E.

f) Wie gross ist der prozentuale Anteil des Pyramidenvolumens am Würfelvolumen?

	a	b	c	d	Punkte
Aufgabe 4 – Wahrscheinlichkeitsrechnung	6	2	1	3	**12**

Am Sporttag sind 10 Teams für das Handballturnier angemeldet. Jedes Team besteht aus 7 Spielerinnen, nämlich einer Torhüterin und sechs Feldspielerinnen. Die 6 Feldspielerinnen spielen auf den folgenden Positionen: Linksaussen, Kreismitte, Rechtsaussen, Rückraumlinks, Rückraummitte und Rückraumrechts.

a) Beim *HC Alpenquai* ist Julia die Torhüterin. Die Positionen der sechs Feldspielerinnen werden vor jedem Spiel neu ausgelost. Der *HC Alpenquai* spielt an diesem Nachmittag 5 Spiele.

a_1) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Lea im ersten Spiel auf der Position Linksaussen und im zweiten Spiel auf der Position Rechtsaussen spielen darf?

a_2) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Lea an diesem Nachmittag nie als Spielerin auf der Position Kreismitte spielen kann?

a_3) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Lea bei genau 3 von 5 Spielen auf der Position Kreismitte im Einsatz steht?

a_4) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Lea bei den 5 Spielen mindestens zweimal als Rückraumspielerin eingesetzt wird?

a_5) Wie viele Spiele müssten mindestens gespielt werden, damit Lea mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99.5% mindestens einmal als Rückraumspielerin eingesetzt würde?
Die einzelnen Schritte zur Lösung der Ungleichung werden verlangt.

b) In der Mittagspause spielen Julia und Lea ein Spiel, um sich die Zeit zu vertreiben. Julia hat 2 lange Zündhölzer und 3 kurze Zündhölzer. Sie hält die 5 Zündhölzer so in der Hand, dass Lea nicht sieht, welches die kurzen und welches die langen Zündhölzer sind. Lea darf nacheinander je ein Zündholz ziehen und behalten. Wenn sie bereits im ersten Zug ein langes Zündholz zieht, erhält Lea 2 Franken von Julia. Falls sie erst im zweiten Zug ein langes Zündholz erwischt, erhält sie noch 1 Franken von Julia. Zieht Lea im dritten Zug ein langes Zündholz, so erfolgt keine Zahlung. Würde Lea jedoch erst im vierten Zug ein langes Zündholz ziehen, so müsste sie 6 Franken an Julia bezahlen.
X sei der Gewinn von Lea bei einem Durchgang dieses Spiels.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X und berechnen Sie anschliessend den durchschnittlichen Gewinn/Verlust von Lea bei diesem Spiel.

bitte wenden!

c) Für das Teamfoto stellen sich die 7 Spielerinnen nebeneinander auf.

c_1) Wie viele mögliche Aufstellungen gibt es?

c_2) In wie vielen Aufstellungen stehen Julia und Lea nebeneinander?

d) Am Ende des Tages werden von den Sponsoren 3 gleiche Preise verlost. An der Verlosung nehmen alle 30 Teams teil, die an diesem Sporttag aktiv waren. Dies sind 10 Handballteams, 6 Fussballteams und 14 Volleyballteams. Zur Verlosung hat jedes Team einen Zettel mit seinem Teamnamen in die Urne geworfen. Der Schiedsrichter zieht 3 Zettel aus der Urne.

d_1) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass 2 Handballteams und 1 Fussballteam diese drei Preise gewinnen?

d_2) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass keines der Handballteams einen Preis gewinnt?

Aufgabe 1 Lösung
Analysis (mit Schwerpunkt Differentialrechnung)

Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = -x^3 + 5x^2 - 7x + 3$.

a) Berechnen Sie die Nullstellen von f, die Koordinaten der Extrem- und Wendepunkte des Graphen von f und zeichnen Sie anschliessend mit Hilfe dieser Punkte den Graphen von f.
(1 Einheit = 4 Häuschen)

$$f(x) = -x^3 + 5x^2 - 7x + 3$$
$$f'(x) = -3x^2 + 10x - 7$$
$$f''(x) = -6x + 10$$
$$f'''(x) = -6$$

Nullstellen: $f(x) = -x^3 + 5x^2 - 7x + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = 1, \quad x_2 = 3}}$

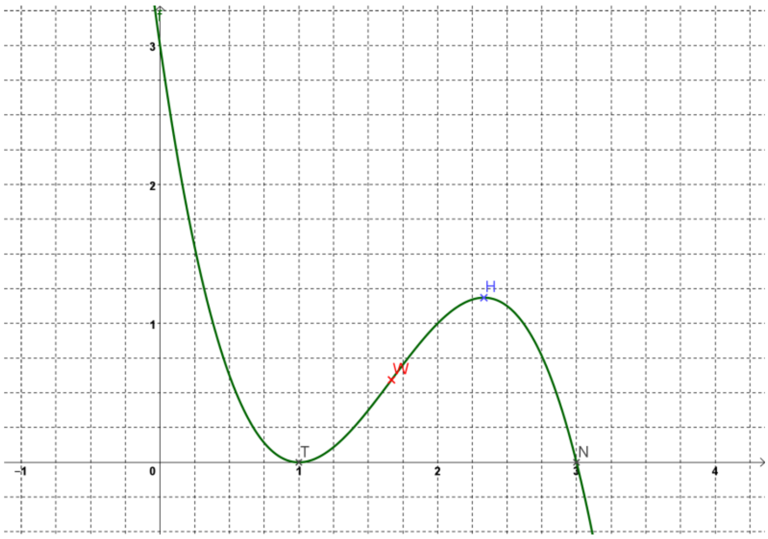
Extrempunkte: $f'(x) = -3x^2 + 10x - 7 = 0 \quad \Leftrightarrow \; x_3 = 1 \quad x_4 = \frac{7}{3}$

$$f(1) = 0$$
$$f''(1) = -6 \cdot 1 + 10 = 4 \geq 0 \qquad \Rightarrow \underline{\underline{T(1/0)}}$$
$$f\left(\tfrac{7}{3}\right) = \tfrac{32}{27}$$
$$f''\left(\tfrac{7}{3}\right) = -6 \cdot \tfrac{7}{3} + 10 = -4 \leq 0 \qquad \underline{\underline{H\left(\tfrac{7}{3} / \tfrac{32}{27}\right) \approx H\left(2.\bar{3} / 1.185\right)}}$$

Wendepunkte: $f''(x) = -6x + 10 = 0 \quad \Leftrightarrow x_5 = \frac{5}{3}$

$$f'''\left(\tfrac{5}{3}\right) = -6 \neq 0$$
$$f\left(\tfrac{5}{3}\right) = \tfrac{16}{27} \qquad \Rightarrow \underline{\underline{W\left(\tfrac{5}{3} / \tfrac{16}{27}\right) \approx W\left(1.\bar{6} / 0.593\right)}}$$

Graph: Zusätzliche Punkte Q(0/3); P(2/1)



b) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente t und die Gleichung der Normalen n an den Graphen von f an der Stelle $x = 2$.

$f'(x) = -3x^2 + 10x - 7$

$f'(2) = -3 \cdot 2^2 + 10 \cdot 2 - 7 = 1 \qquad \Rightarrow \; a_t = 1$

$f(2) = 1 \qquad \Rightarrow P(2/1)$

Tangente: $t(x) = 1 \cdot x + b$

$1 = 1 \cdot 2 + b \qquad \Rightarrow b = -1 \qquad \Rightarrow \underline{\underline{t(x) = x - 1}}$

Normale: $a_t \cdot a_n = -1 \qquad \Rightarrow \; a_n = -1$

$n(x) = -1x + b$

$1 = -1 \cdot 2 + b \qquad \Rightarrow b = 3 \qquad \underline{\underline{n(x) = -x + 3}}$

c) Gegeben ist zudem die Funktion g mit der Funktionsgleichung $g(x) = -7x \cdot cos(x)$. Bestimmen Sie die Ableitungsfunktion g' und zeigen Sie, dass die beiden Funktionen f und g an der Stelle $x = 0$ parallele Tangenten haben.

$g(x) = -7x \cdot cos(x)$

$g'(x) = -7 \cdot cos(x) - 7x \cdot (-sin(x)) = \underline{\underline{-7\,cos(x) + 7x \cdot sin(x)}}$

$g'(0) = -7 \cdot cos(0) + 7 \cdot 0 \cdot sin(0) = -7 \cdot 1 + 0 = -7$

$f'(x) = -3x^2 + 10x - 7$

$f'(0) = -7 \qquad \Rightarrow \; \underline{\underline{g'(0) = -7 = f'(0)}}$

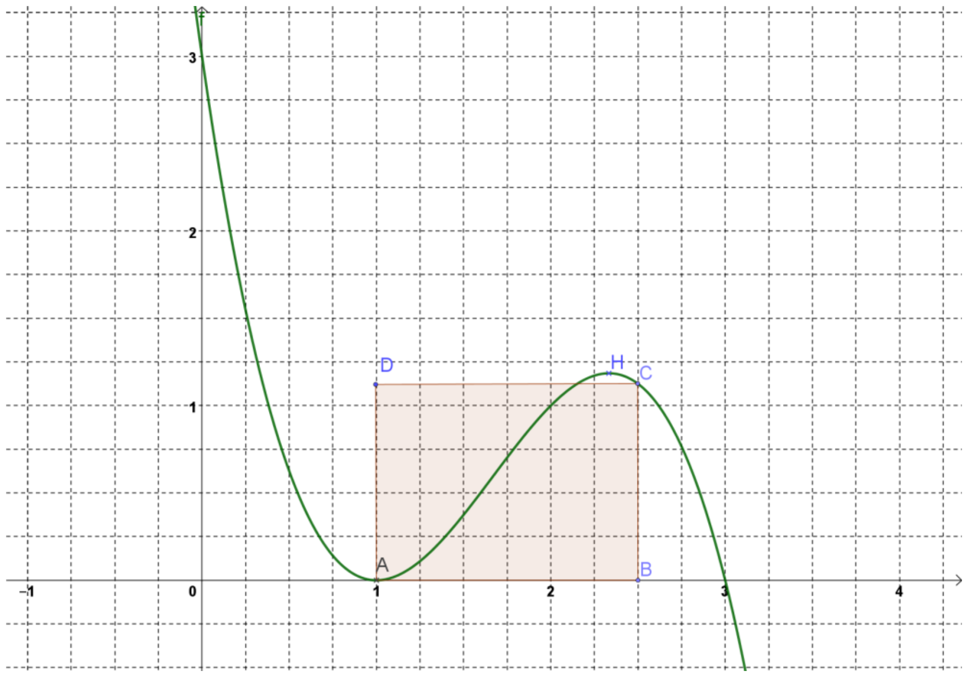
d) Von einem Rechteck ABCD ist der Punkt A(1/0) gegeben. Der Punkt B liegt ebenfalls auf der x-Achse und hat somit die Koordinaten B(u/0) für $u \geq 1$. Der Punkt C soll auf dem Graphen der Funktion f liegen. Berechnen Sie u so, dass das Rechteck ABCD maximalen Flächeninhalt hat. Bestimmen Sie auch den Flächeninhalt dieses Rechtecks.

$$A = (u-1) \cdot f(u)$$
$$A(u) = (u-1)(-u^3 + 5u^2 - 7u + 3) = -u^4 + 5u^3 - 7u^2 + 3u + u^3 - 5u^2 + 7u - 3$$
$$A(u) = -u^4 + 6u^3 - 12u^2 + 10u - 3$$
$$A'(u) = -4u^3 + 18u^2 - 24u + 10$$
$$A'(u) = 0 \qquad \Leftrightarrow \quad u_1 = \tfrac{5}{2} \quad u_2 = 1$$

$$A''(u) = -12u^2 + 36u - 24$$
$$A''\left(\tfrac{5}{2}\right) = -9 \leq 0$$

Die Fläche ist maximal für $\underline{\underline{u = \tfrac{5}{2} = 2.5}}$

$$f\left(\tfrac{5}{2}\right) = \tfrac{9}{8} = 1.125$$
$$A = (u-1) \cdot f(u) = \frac{3}{2} \cdot \frac{9}{8} = \underline{\underline{\frac{27}{16} = 1.6875}}$$



Aufgabe 2 Analysis (mit Schwerpunkt Integralrechnung) - Lösung

Gegeben sind folgende Funktionen:

$f(x)=\frac{1}{2}x^3-5x+2$

$g(x)=\frac{10}{x+5}$

$h(x)=4xe^{-\frac{1}{6}x^2}$

a) Bestimmen Sie die Definitionsmengen der Funktionen f, g und h.

$f(x)=\frac{1}{2}x^3-5x+2$ $\qquad \mathbb{D}=\mathbb{R}$

$g(x)=\frac{10}{x+5}$

$x+5=0$

$x=-5$ $\qquad \mathbb{D}=\mathbb{R}\setminus\{-5\}$

$h(x)=4xe^{-\frac{1}{6}x^2}$ $\qquad \mathbb{D}=\mathbb{R}$

b) Bestimmen Sie alle Stammfunktionen der Funktionen f und g und zeigen Sie, dass $H(x)=-12e^{-\frac{1}{6}x^2}$ eine Stammfunktion von h ist.

$$F(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}x^4-5\cdot\frac{1}{2}x^2+2x+c=\frac{1}{8}x^4-\frac{5}{2}x^2+2x+c$$

$$G(x)=10\cdot\ln(|x+5|)+c$$

$$H'(x)=-12e^{-\frac{1}{6}x^2}\cdot(-\frac{1}{6}\cdot 2x)=4xe^{-\frac{1}{6}x^2}=h(x)$$

c) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph der Funktion f und die x-Achse miteinander einschliessen.

$$f(x) = 0$$

$$\frac{1}{2}x^3 - 5x + 2 = 0 \quad \xrightarrow{TR} \quad x_1 = -3.35\,; \quad x_2 = 2.94\,; \quad x_3 = 0.41$$

$$A = \left|\int_{-3.35}^{0.41} f(x)dx\right| + \left|\int_{0.41}^{2.94} f(x)dx\right| = |19.42| + |-6.79| = 19.42 + 6.79 = \underline{\underline{26.21}}$$

d) Berechnen Sie das Integral von g über dem Intervall $I = [0;5]$.

$$\int_0^5 g(x)dx = \underline{\underline{6.93}}$$

e) Der Graph der Funktion h, die x-Achse und die Gerade $x = b$ (mit $b > 0$) schliessen im ersten Quadranten eine Fläche ein.

e1) Berechnen Sie den Inhalt $A(b)$ dieser Fläche in Anhängigkeit von b.

$$h(x) = 0$$

$$4xe^{-\frac{1}{6}x^2} = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{x = 0}} \quad (e^{-\frac{1}{6}x^2} \neq 0)$$

$$\text{A(b)} = \int_0^b h(x)dx = [H(x)]_0^b = -12e^{-\frac{1}{6}b^2} - \left(-12e^{-\frac{1}{6}0^2}\right) = -12e^{-\frac{1}{6}b^2} + 12$$

e2) Berechnen Sie $A(b)$ für $b \to \infty$.

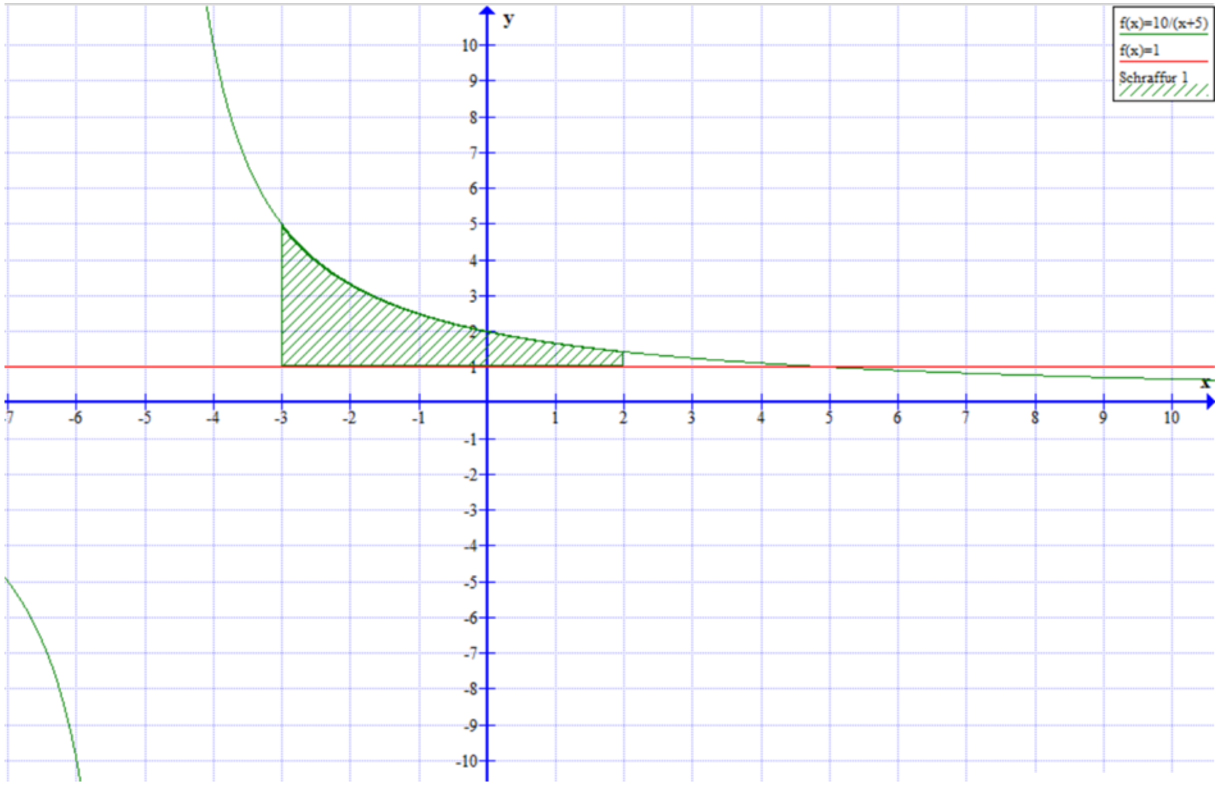
Uneigentliches Integral:

$$\int_0^\infty h(x)dx = \lim_{b\to\infty}\left(\int_0^b h(x)dx\right) = \lim_{b\to\infty} -12e^{-\frac{1}{6}b^2} + 12 = \underline{\underline{12}}$$

da $\lim_{b\to\infty}\left(e^{-\frac{1}{6}b^2}\right) = 0$

f) Das Flächenstück zwischen der Horizontalen durch den Punkt $P(0\,|\,1)$ und dem Graphen von g rotiert auf dem Intervall $[-3, 2]$ um die x-Achse.

f₁) Skizzieren Sie den Graphen von g und kennzeichnen Sie schraffiert das oben beschriebene Flächenstück.



f₂) Berechnen Sie ohne Angabe einer Stammfunktion das Volumen des entstehenden Rotationskörpers.

Horizontale durch den Punkt $P(0/1)$: $w(x)=1$

$$f(x)=w(x) \qquad \frac{10}{x+5}=1 \qquad |\cdot(x+5)$$

$$10=x+5 \qquad |-5$$

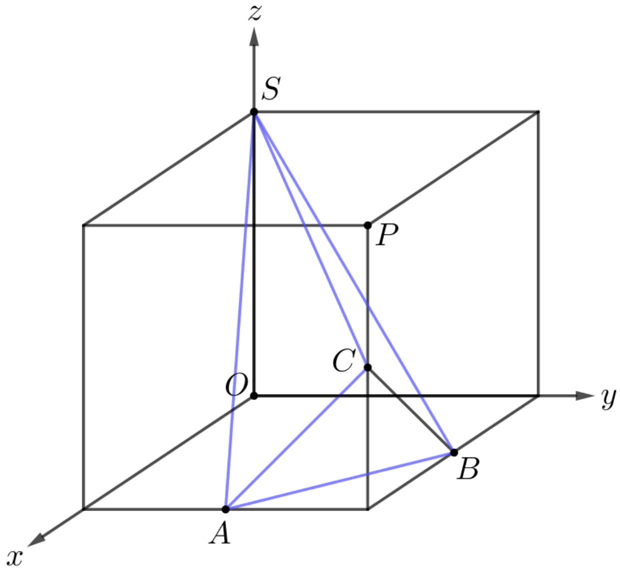
$$\underline{\underline{x=5}}$$

Es gibt also keine Schnittpunkte von g und w im Intervall $[-3;2]$.
(Oder aus Zeichnung ablesen!)

$$V=\pi\left|\int_{-3}^{2}\left((g(x))^2-(w(x))^2\right)dx\right|=\pi\left|\int_{-3}^{2}\left(\left(\frac{10}{x-5}\right)^2-1\right)dx\right|=\pi|30.71|=\underline{\underline{96.49}}$$

Aufgabe 3 Vektorgeometrie - Lösung

In einem Würfel mit den Eckpunkten $O(\ 0 \mid 0 \mid 0\ )$, $P(\ 10 \mid 10 \mid 10\ )$ und $S(\ 0 \mid 0 \mid 10\ )$ befindet sich eine Pyramide mit einem Dreieck als Grundfläche und der Spitze S.
Die Eckpunkte A, B und C der Pyramidengrundfläche sind gegeben durch
$A(\ 10 \mid 6 \mid 0\ )$, $B(\ 6 \mid 10 \mid 0\ )$ und $C(\ 10 \mid 10 \mid 5\ )$.



a) Bestimmen Sie eine Parametergleichung der Ebene E, welche die Punkte A, B und C enthält.

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

b) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E.

$$\begin{array}{l|l|} I. & x = 10 + 4u \\ II. & y = \ 6 - 4u + 4v \\ III. & z = \qquad\qquad 5v \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l|} I.+II. & x + y = 16 + 4v \\ III. & \qquad z = \quad 5v \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l|} 5\cdot(I.+II.) & 5x + 5y = 80 + 20v \\ -4\cdot III. & \quad -4z = \ -20v \\ \hline & 5x + 5y - 4z = 80 \end{array}$$

Koordinatengleichung der Ebene E: $\underline{\underline{5x + 5y - 4z = 80}}$

Verwenden Sie im Folgenden *E:* $5x+5y-4z=80$.

c) Berechnen Sie den spitzen Winkel α, den die Ebene *E* mit der *xy*-Ebene einschließt.

$$\overrightarrow{n_E}=\begin{pmatrix}5\\5\\-4\end{pmatrix},\ \overrightarrow{\mathrm{n}_{\mathrm{xy}}}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\left|\begin{pmatrix}5\\5\\-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|=\sqrt{66}\cdot 1\cdot\cos\alpha$$

$$4=\sqrt{66}\cdot\cos\alpha$$

$$\frac{4}{\sqrt{66}}=\cos\alpha$$

$$\alpha=\arccos\left(\frac{4}{\sqrt{66}}\right)$$

$$\underline{\underline{\alpha\approx 60.50^\circ}}$$

d) Weisen Sie rechnerisch nach, dass es sich beim Dreieck *ABC* um ein gleichschenkliges Dreieck handelt und berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks *ABC*.

$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-4\\4\\0\end{pmatrix},\ \overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}0\\4\\5\end{pmatrix},\ \overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}4\\0\\5\end{pmatrix}\qquad\Rightarrow\ \overline{AC}=\overline{BC}=\sqrt{41}$$

$$M_c\left(\tfrac{10+6}{2}\,|\,\tfrac{6+10}{2}\,|\,0\right)=M_c(8\,|\,8\,|\,0)$$

$$h_c=\left|\overline{M_cC}\right|=\left|\begin{pmatrix}2\\2\\5\end{pmatrix}\right|=\sqrt{4+4+25}=\sqrt{33}\approx 5.74$$ (oder mit Pythagoras)

$$\underline{\underline{A_\Delta}}=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot h_c}{2}=\frac{4\sqrt{2}\cdot\sqrt{33}}{2}\approx\underline{\underline{16.25}}$$

e) Berechnen Sie die Koordinaten des Lotfusspunkts *L* von *S* in *E*.

Normale zu E durch S: $\vec{r}=\begin{pmatrix}0\\0\\10\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}5\\5\\-4\end{pmatrix}$

Lotfusspunkt: $L(5t\,|\,5t\,|\,10-4t)$

Eingesetzt in E: $5\cdot 5t+5\cdot 5t-4\cdot(10-4t)=80$

$$t=\frac{20}{11}$$

$$\underline{\underline{\mathrm{L}\left(\tfrac{100}{11}\,|\,\tfrac{100}{11}\,|\,\tfrac{30}{11}\right)}}$$

f) Wie viel Prozent des Würfelvolumens beträgt das Pyramidenvolumen?

$$h = \left|\overrightarrow{LS}\right| = \left|\begin{pmatrix} -\frac{100}{11} \\ -\frac{100}{11} \\ \frac{80}{11} \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\left(-\tfrac{100}{11}\right)^2 \cdot 2 + \left(\tfrac{80}{11}\right)^2} \approx 14.77$$

$$\underline{V_P} = \frac{G \cdot h}{3} = \frac{A_\Delta \cdot \left|\overrightarrow{LS}\right|}{3} = \frac{16.25 \cdot 14.77}{3} = \underline{80} \qquad \underline{V_W} = s^3 = \underline{1000}$$

$$\Rightarrow \frac{V_P}{V_W} = \frac{80}{1000} = \underline{\underline{8\%}}$$

Aufgabe 4 Wahrscheinlichkeit und Kombinatorik - Lösung

Am Sporttag sind 10 Teams für das Handballturnier angemeldet. Jedes Team besteht aus 7 Spielerinnen, nämlich einer Torhüterin und sechs Feldspielerinnen. Die 6 Feldspielerinnen spielen auf den folgenden Positionen: Linksaussen, Kreismitte, Rechtsaussen, Rückraumlinks, Rückraummitte und Rückraumrechts.

a) Beim „HC Alpenquai" ist Julia die Torhüterin. Die Positionen der sechs Feldspielerinnen werden vor jedem Spiel neu ausgelost. Der „HC Alpenquai" spielt an diesem Nachmittag 5 Spiele.

a1) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Lea im ersten Spiel auf der Position Linksaussen und im zweiten Spiel auf der Position Rechtsaussen spielen darf?

$$P(linksaussen\ ,\ rechtsaussen) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} = 0.02\overline{7}$$

a2) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Lea an diesem Nachmittag nie als Spielerin auf der Position Kreismitte spielen kann?

$$P(nie\ Kreismitte) = \left(\frac{5}{6}\right)^5 \approx 0.4019$$

a3) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Lea bei genau 3 von 5 Spielen auf der Position Kreismitte im Einsatz steht?

$$P(genau\ dreimal\ Kreismitte) = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 10 \cdot \frac{1}{216} \cdot \frac{25}{36} \approx 0.03215$$

a4) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Lea bei den 5 Spielen mindestens zweimal als Rückraumspielerin eingesetzt wird?

$$P(min d.\ zweimal\ Rückraum) = 1 - P(0) - P(1) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5 - \binom{5}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$= 1 - \frac{1}{32} - \frac{5}{32} = \frac{26}{32} = 0.8125$$

a5) Wie viele Spiele müssten mindestens gespielt werden, damit Lea mit einer Wahrscheinlich-keit von mehr als 99.5% mindestens einmal als Rückraumspielerin eingesetzt würde? Die einzelnen Schritte zur Lösung der Ungleichung werden verlangt.

$$P(min d.\ einmal\ Rückraum) = 1 - P(0) \geq 0.995$$

$$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \geq 0.995$$

$$0.005 \geq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$n \geq log_{0.5}(0.005)$$

$$n \geq 7.64$$

Es müsste mindestens 8 Spiele geben.

b) In der Mittagspause spielen Julia und Lea ein Spiel um sich die Zeit zu vertreiben. Julia hat 2 lange Zündhölzer und 3 kurze Zündhölzer. Sie hält die 5 Zündhölzer so in der Hand, dass Lea nicht sieht, welches die kurzen und welches die langen Zündhölzer sind. Lea darf nacheinander je ein Zündholz ziehen und behalten. Wenn sie bereits im ersten Zug ein langes Zündholz zieht, erhält Lea 2 Franken von Julia. Falls sie erst im zweiten Zug ein langes Zündholz erwischt, erhält sie noch 1 Franken von Julia. Zieht Lea im dritten Zug ein langes Zündholz, so erfolgt keine Zahlung. Würde Lea jedoch erst im vierten Zug ein langes Zündholz ziehen, so müsste sie 6 Franken an Julia bezahlen.
X sei der Gewinn von Lea bei einem Durchgang dieses Spiels.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X und berechnen Sie anschliessend den durchschnittlichen Gewinn/Verlust von Lea bei diesem Spiel.

$$P(X = 2\ Fr.) = \frac{2}{5} = 0.4$$

$$P(X = 1\ Fr.) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = 0.3$$

$$P(X = 0\ Fr.) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = 0.2$$

$$P(X = -6\ Fr.) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = 0.1$$

$$\begin{aligned} E(X) &= 2\ Fr. \cdot P(X = 2\ Fr.) + 1\ Fr. \cdot P(X = 1 Fr.) \\ &\quad + 0\ Fr. \cdot P(X = 0\ Fr.) + (-6\ Fr.) \cdot P(X = -6\ Fr.) \\ &= 2\ Fr. \cdot 0.4 + 1 Fr. \cdot 0.3 + 0 Fr. \cdot 0.2 - 6 Fr \cdot 0.1 = 0.5 Fr. \end{aligned}$$

Der durchschnittliche Gewinn beträgt 50 Rappen.

c) Für das Teamfoto stellen sich die 7 Spielerinnen nebeneinander auf.

c_1) Wieviele mögliche Aufstellungen gibt es?

Anzahl Anordnungen = $7! = 5040$

c_2) In wie vielen Aufstellungen stehen Julia und Lea nebeneinander?

Anzahl Anordnungen = $2 \cdot 6! = 1440$

d) Am Ende des Tages werden von den Sponsoren 3 gleiche Preise verlost. An der Verlosung nehmen alle 30 Teams teil, die an diesem Sporttag aktiv waren. Dies sind 10 Handballteams, 6 Fussballteams und 14 Volleyballteams. Zur Verlosung hat jedes Team einen Zettel mit seinem Teamnamen in die Urne geworfen. Der Schiedsrichter zieht 3 Zettel aus der Urne.

d_1) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass 2 Handballteams und 1 Fussballteam diese drei Preise gewinnen?

$$P(2H, 1F) = \frac{\binom{10}{2} \cdot \binom{6}{1}\binom{14}{0}}{\binom{30}{3}} = 0.06650$$

$$P(2H, 1F) = 3 \cdot \frac{10}{30} \cdot \frac{9}{29} \cdot \frac{6}{28} \approx 0.06650$$

d_2) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass keines der Handballteams einen Preis gewinnt?

$$P(kein\ H) = \frac{\binom{10}{0} \cdot \binom{20}{3}}{\binom{30}{3}} \approx 0.2808$$

$$P(kein\ H) = \frac{20}{30} \cdot \frac{19}{29} \cdot \frac{18}{28} \approx 0.2808$$