KANTON LUZERN
Bildungs- und Kulturdepartement

Kantonsschule Alpenquai Luzern

Schriftliche Maturitätsprüfung 2019

Fach	Schwerpunktfach Physik und Anwendungen der Mathematik
Prüfende Lehrpersonen	Christian Ferndriger christian.ferndriger@edulu.ch Teodora Mitkova teodora.mitkova@edulu.ch
Klassen	6e
Prüfungsdatum	27.05.2019
Prüfungsdauer	180 Minuten
Erlaubte Hilfsmittel	- Formelsammlung DMK - Taschenrechner: TI30X - Pro MV (ohne Handbuch)
Anweisungen zur Lösung der Prüfung	- Es wird Wert auf eine saubere Darstellung gelegt. - Jede Aufgabe soll einen vollständigen und nachvollziehbaren Lösungsweg enthalten. - Bitte lösen Sie die Aufgaben 1 - 5 (Physik) und 6 - 9 (Mathematik) auf separate Bögen. - Für die Note 6 werden mindestens 47.5 Punkte benötigt.
Anzahl erreichbarer Punkte	**Physik** *Aufgabe 1: 6 Punkte* *Aufgabe 2: 6 Punkte* *Aufgabe 3: 6 Punkte* *Aufgabe 4: 6 Punkte* *Aufgabe 5: 6 Punkte* **Mathematik** *Aufgabe 6: 8 Punkte* *Aufgabe 7: 9 Punkte* *Aufgabe 8: 7 Punkte* *Aufgabe 9: 6 Punkte* **Total:** *60 Punkte*
Anzahl Seiten (inkl. Titelblatt)	6

………………………………………………………… Name, Vorname

……………… Klasse

……………… Nummer

……………… Punkte

……………… Note

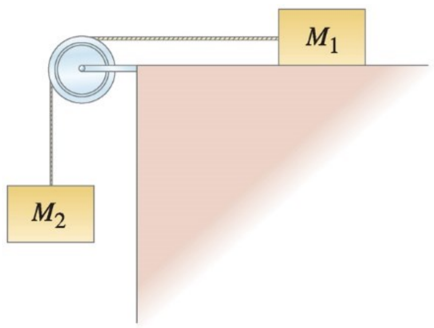
	a	b	c	Punkte
Aufgabe 1 [*Mechanik: Starre Körper*]	2.5	2.5	1	**6**

Die Abbildung zeigt zwei Massen, die durch ein Seil miteinander verbunden sind. Das masselose Seil läuft ohne zu rutschen über eine Rolle mit dem Radius R_0 und dem Trägheitsmoment J. Die Masse M_1 gleitet auf einer reibungsfreien Fläche und M_2 hängt frei.

a) Bestimmen Sie eine Formel für den Drehimpuls des Systems um die Drehachse der Rolle in Abhängigkeit der Geschwindigkeit v der Masse M_1 oder M_2, R_0 und J.

b) Berechnen Sie die Beschleunigung des Systems.

c) Behauptung: Wenn man die Masse M_1 verdoppeln würde, so würde sich die Beschleunigung halbieren. Wahr oder falsch? Begründen Sie!



	a	b	Punkte
Aufgabe 2 [*Wärmekraftmaschine*]	5	1	**6**

Ein Kraftwerk mit Dampfturbinen liefert 1 GW elektrische Leistung. Der Dampf strömt mit einer Temperatur von 600 K in die Turbinen, die Abwärme wird mit einem Kühlkreis an Flusswasser abgegeben. Der Rücklauf des Kühlwassers hat nach dem Fluss die Temperatur von 285 K. Nehmen Sie an, dass die Turbinen als ideale Carnot-Maschinen arbeiten und der Stromgenerator einen Wirkungsgrad von 100% hat.

a) Berechnen Sie den durchschnittlichen Temperaturanstieg des Flusswassers flussabwärts des Kraftwerks, wenn der Fluss eine Strömungsrate von 37 m^3 /s hat.

b) Wie wirkt sich ein sehr heisser Sommer auf den Wirkungsgrad des Kraftwerks aus?

Aufgabe 3 [*Elektrodynamik: Ablenkung von Protonen*]	a	b	c	d	Punkte
	1.5	1	2	1.5	**6**

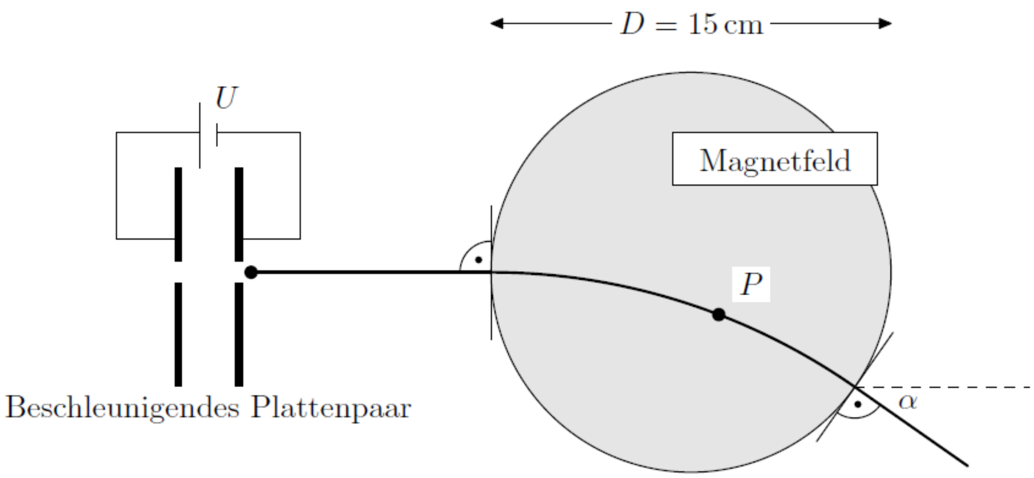
Protonen werden zwischen zwei parallelen Platten, an welchen die Spannung U angelegt ist, beschleunigt. Sie treten anschliessend in eine Zone ein, in der ein homogenes Magnetfeld B herrscht, und führen dort eine kreisförmige Flugbahn aus.

a) Wie gross muss die an die Platten angelegte Spannung sein, damit die Protonen aus dem anfänglichen Stillstand eine Geschwindigkeit von $v = 3.0 \cdot 10^6$ m/s erreichen?

b) Wie gross ist die Geschwindigkeit der Protonen, wenn sie sich genau in der Mitte zwischen den beschleunigenden Platten befinden?

c) Das Magnetfeld habe eine Stärke von 60 mT. Geben Sie die Richtung des Magnetfeldes an. Zeichnen Sie andererseits die Kraft ein, die auf ein Proton im Punkt P wirkt, und berechnen Sie den Radius der Flugbahn des Protons in diesem Punkt P.

d) Berechnen Sie den Ablenkungswinkel α des Protons.



	a	b	c	Punkte
Aufgabe 4 [*Wechselstrom: Schwingkreis*]	4	1	1	**6**

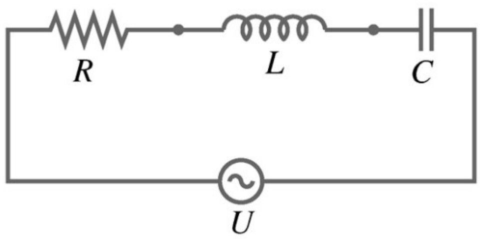
Angenommen, in der unteren Abbildung gilt $R = 25.0\ \Omega$, $L = 30.0$ mH und $C = 12.0$ µF und an den Stromkreis ist eine Wechselspannungsquelle von 90 V (effektiv) bei 500 Hz angeschlossen.

Berechnen Sie

a) den im Stromkreis fliessenden (effektiven) Strom,

b) den Phasenwinkel ϕ,

c) sowie die im Stromkreis verbrauchte Leistung.



	a	b	c	d	Punkte
Aufgabe 5 [*Photoelektrischer Effekt/de-Broglie-Wellenlänge*]	2.5	1	1.5	1	**6**

Licht mit einer Wellenlänge von 300nm trifft auf ein Metall mit der Austrittsarbeit 2.2 eV.

a) Berechnen Sie die maximale kinetische Energie der Photoelektronen.

b) Berechnen Sie den maximalen Impuls.

c) Wie gross ist die kürzeste de-Broglie-Wellenlänge der auf diese Weise erzeugten Photoelektronen?

d) Weshalb sprechen wir von Welleneigenschaften der Elektronen? Weshalb sprechen wir von Teilcheneigenschaften der Elektronen? Erklären Sie mit experimentellen Beispielen!

	a	b	c	d	Punkte
Aufgabe 6 [Affine Abbildungen]	1	1	2	4	**8**

Gegeben ist die lineare affine Abbildung $f_k : \overrightarrow{x'} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & k \end{pmatrix} \vec{x}$ mit $k \in \mathbb{R}$.

a) Für welche k handelt es sich um eine Affinität?

b) Ist die Abbildung f_5 parallelentreu? Begründen Sie Ihre Antwort!

c) Begründen Sie, dass die Abbildung f_1 eine Drehstreckung mit dem Streckfaktor $\sqrt{10}$ darstellt. Bestimmen Sie das Drehmass von f_1.

d) Untersuchen Sie die Abbildung f_{11} auf Fixelemente.

	a	b	c	d	Punkte
Aufgabe 7 [Komplexe Funktionen]	1	2	2	4	**9**

Gegeben sind die Teilmenge der komplexen Ebene

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : |Re(z)| \leq 4, |Im(z)| \leq 2\}$$

und die komplexen Funktionen f und g mit

$$f(z) = \frac{e^{i\pi/2}}{2} z \text{ und } g(z) = z^2.$$

a) Stellen Sie die Menge $\mathcal{D}$ graphisch dar.

b) Begründen Sie, dass die Funktion f eine Drehstreckung beschreibt. Bestimmen Sie das Streckzentrum Z_0, den Drehwinkel α und den Streckfaktor k der Drehstreckung.

c) Die Teilmenge $\widetilde{\mathcal{D}}_f$ der komplexen Ebene ist das Bild von $\mathcal{D}$ unter der Funktion f. Bestimmen Sie die Menge $\widetilde{\mathcal{D}}_f$ und stellen Sie diese graphisch dar.

d) Die Teilmenge $\widetilde{\mathcal{D}}_g$ der komplexen Ebene ist das Bild von $\mathcal{D}$ unter der Funktion g. Bestimmen Sie die Gleichungen der begrenzenden Kurven von $\widetilde{\mathcal{D}}_g$ und stellen Sie die Menge $\widetilde{\mathcal{D}}_g$ graphisch möglichst genau dar.

	a	b	c	Punkte
Aufgabe 8 [Kegelschnitte]	1	3	3	**7**

Die Ellipse $x^2 + 5y^2 = 20$ und eine Hyperbel haben die Brennpunkte und den Punkt $P\left(\sqrt{10} \mid y_P\right)$ mit $y_P > 0$ gemeinsam.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Brennpunkte der beiden Kurven.

b) Bestimmen Sie die Mittelpunktsgleichung der Hyperbel sowie die Gleichungen ihrer Asymptoten.

c) Skizzieren Sie die Kurve der Ellipse, indem Sie einige Punkte sichtbar mit Zirkel und Lineal konstruieren. Erklären Sie die Konstruktion.

	a	b	c	Punkte
Aufgabe 9 [Differentialgleichungen]	1	3	2	**6**

In einem zylinderförmigen Gefäss befinden sich 5000 g Wasser. Im Wasser sind 100 g Kochsalz gelöst. Ein Rührwerk sorgt für stets gleichmässige Durchmischung. Durch eine Röhre fliessen pro Minute 60 g Wasser zu, während durch eine zweite Röhre gleichzeitig pro Minute 60 g salzhaltiges Wasser abfliessen.

Es sei $S(t)$ die zur Zeit t (in min) im Gefäss vorhandene Salzmenge (in g).

a) Drücken Sie die Menge Salz (in g), welche zur Zeit t in 60 g Wasser im durchgemischten Tank gelöst ist mit Hilfe von $S(t)$ aus.

b) Begründen Sie, dass $S(t)$ die Differentialgleichung $S'(t) = -0.012S(t)$ erfüllt. Wie lässt sich die im Gefäss vorhandene Salzmenge für jeden Wert von t berechnen?

c) Wie lange dauert es, bis sich nur noch 10 g Salz im Gefäss befinden? Kann das Salz auf die angegebene Weise gänzlich aus dem Gefäss entfernt werden?

	a	b	c	Punkte
Aufgabe 1 [*Mechanik: Starre Körper*]	2.5	2.5	1	**6**

Die Abbildung zeigt zwei Massen, die durch ein Seil miteinander verbunden sind. Das masselose Seil läuft ohne zu rutschen über eine Rolle mit dem Radius R_0 und dem Trägheitsmoment J. Die Masse M_1 gleitet auf einer reibungsfreien Fläche und M_2 hängt frei.

a) Bestimmen Sie eine Formel für den Drehimpuls des Systems um die Drehachse der Rolle in Abhängigkeit der Geschwindigkeit v der Masse M_1 oder M_2, R_0 und J.

$$L = R_0M_1v + R_0M_2v + J\omega$$
$$= R_0M_1v + R_0M_2v + J(v/R_0)$$
$$= (R_0M_1 + R_0M_2 + J/R_0)\, v$$

b) Berechnen Sie die Beschleunigung des Systems.

$$M = dL/dt$$
$$M_2gR_0 = (R_0\, M_1 + R_0M_2 + J/R_0)\, dv/dt$$ *Idee: Ableitung*
$$a = dv/dt = M_2g/(M_1+M_2+J/R_0^2)$$

c) Behauptung: Wenn man die Masse M_1 verdoppeln würde, so würde sich die Beschleunigung halbieren. Wahr oder falsch? Begründen Sie!

Falsch, siehe Formel bei b) → *$2M_1$ daraus folgt nicht ½ a*

	a	b	Punkte
Aufgabe 2 [*Wärmekraftmaschine*]	5	1	**6**

Ein Kraftwerk mit Dampfturbinen liefert 1 GW elektrische Leistung. Der Dampf strömt mit einer Temperatur von 600 K in die Turbinen, die Abwärme wird mit einem Kühlkreis an Flusswasser abgegeben. Der Rücklauf des Kühlwassers hat nach dem Fluss die Temperatur von 285 K. Nehmen Sie an, dass die Turbinen als ideale Carnot-Maschinen arbeiten und der Stromgenerator einen Wirkungsgrad von 100% hat.

a) Berechnen Sie den durchschnittlichen Temperaturanstieg des Flusswassers flussabwärts des Kraftwerks, wenn der Fluss eine Strömungsrate von 37 m^3 /s hat.

$$\eta = 1 - T_L/T_H = 1 - 285K/600K = 0{,}525 = 52{,}5\%$$
$$\eta = W/Q_H$$
$$0{,}525 = 1\ GW/(Q_H/t) \rightarrow Q_H/t = 1{,}9\ GW$$
$$Q_L/t = Q_H/t - W/t = 1{,}9\ GW - 1\ GW = 0{,}9\ GW$$
$$Q_L/t = c\cdot(m/t)\cdot \Delta T \rightarrow \Delta T = 5{,}8°C$$

b) Wie wirkt sich ein sehr heisser Sommer auf den Wirkungsgrad des Kraftwerks aus?

Wenn die Temperatur des Flusses steigt, verschlechtert sich der Carnot - Wirkungsgrad.

	a	b	c	d	Punkte
Aufgabe 3 [*Elektrodynamik: Ablenkung von Protonen*]	1.5	1	2	1.5	**6**

Protonen werden zwischen zwei parallelen Platten, an welchen die Spannung U angelegt ist, beschleunigt. Sie treten anschliessend in eine Zone ein, in der ein homogenes Magnetfeld B herrscht, und führen dort eine kreisförmige Flugbahn aus.

a) Wie gross muss die an die Platten angelegte Spannung sein, damit die Protonen aus dem anfänglichen Stillstand eine Geschwindigkeit von $v = 3.0 \cdot 10^6$ m/s erreichen?

$qU = ½\, mv^2$ $[m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg; $q = 1,602 \cdot 10^{-19}$C]
$U = ½\, mv^2/q = 46,97\ kV$

b) Wie gross ist die Geschwindigkeit der Protonen, wenn sie sich genau in der Mitte zwischen den beschleunigenden Platten befinden?

$½\, mv^2 = qU$
$½\, mv_m^2 = qU/2 \rightarrow v_m = 1/(\sqrt{2})\ v = 2,12 \cdot 10^6\ m/s$

c) Das Magnetfeld habe eine Stärke von 60 mT. Geben Sie die Richtung des Magnetfeldes an. Zeichnen Sie andererseits die Kraft ein, die auf ein Proton im Punkt P wirkt, und berechnen Sie den Radius der Flugbahn des Protons in diesem Punkt P.

Richtung: aus dem Blatt heraus (3-Finger-Regel)
$qvB = mv^2/r$
$r = mv/qB = 0,52\ m$

d) Berechnen Sie den Ablenkungswinkel α des Protons.

$(D/2)/r = \tan\phi \rightarrow \phi = \arctan((D/2)/r) = 8,179°$
$\gamma = 180° - 90° - \phi$
$2\gamma + \alpha = 180° \rightarrow \alpha = 2\phi = 16,35°$

	a	b	c	Punkte
Aufgabe 4 [*Wechselstrom: Schwingkreis*]	4	1	1	**6**

Angenommen, in der unteren Abbildung gilt $R = 25.0\ \Omega$, $L = 30.0$ mH und $C = 12.0$ µF und an den Stromkreis ist eine Wechselspannungsquelle von 90 V (effektiv) bei 500 Hz angeschlossen.
Berechnen Sie

a) den im Stromkreis fliessenden (effektiven) Strom,

$Z_L = \omega L = 2\pi f L = 94,2\ \Omega$
$Z_C = 1/\omega C = 1/2\pi f C = 26,5\ \Omega$
$Z = \sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2} = 72,2\ \Omega$
$I_{eff} = \frac{U_{eff}}{Z} = 1,25\ \text{A}$

b) den Phasenwinkel ϕ,

$\tan\phi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \rightarrow \phi = 1,22 = 69,7°$

c) sowie die im Stromkreis verbrauchte Leistung.

$P = U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \cos\phi = (90\text{V})(1,25\text{A})\cos(69,7°) = 39\ \text{W}$

Aufgabe 5 [*Photoelektrischer Effekt/de-Broglie-Wellenlänge*]	a	b	c	d	Punkte
	2.5	1	1.5	1	6

Licht mit einer Wellenlänge von 300nm trifft auf ein Metall mit der Austrittsarbeit 2.2 eV.

a) Berechnen Sie die maximale kinetische Energie der Photoelektronen.

$hf = h(\frac{c}{\lambda}) = (6{,}626 \cdot 10^{-34}\ \text{Js})(3 \cdot 10^{8}\ \text{m/s})/(3 \cdot 10^{-9}\ \text{m}) = 6{,}626 \cdot 10^{-19}\ \text{J} = 4{,}13\ \text{eV}$

$E_{kin,max} = \frac{1}{2} m_e v_{max}^2 = hf - W_A = 4{,}13\ \text{eV} - 2{,}2\ \text{eV} = 1{,}93\ \text{eV}$

b) Berechnen Sie den maximalen Impuls.

$E_{kin,max} = \frac{p_{max}{}^2}{2m_e} \rightarrow p_{max} = \sqrt{2m_e \cdot E_{kin,max}} = 7{,}5 \cdot 10^{-25}\ \text{kg m/s}$

c) Wie gross ist die kürzeste de-Broglie-Wellenlänge der auf diese Weise erzeugten Photoelektronen?

$\lambda_{min} = \frac{h}{p_{max}} = \frac{h}{\sqrt{2m_e \cdot E_{kin,max}}} = 8{,}8 \cdot 10^{-10}\ \text{m} = 0{,}88\ \text{nm}$

d) Weshalb sprechen wir von Welleneigenschaften der Elektronen? Weshalb sprechen wir von Teilcheneigenschaften der Elektronen? Erklären Sie mit experimentellen Beispielen!

Elektronen verhalten sich bei z.B. Streuexperimenten an Kristallen wie Wellen. Wenn sie hingegen kollidieren, verhalten sie sich wie Teilchen.

Aufgabe 6 [Affine Abbildungen]	a	b	c	d	Punkte
	1	1	2	4	8

Gegeben ist die lineare affine Abbildung $f_k : \vec{x'} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & k \end{pmatrix} \vec{x}$ mit $k \in \mathbb{R}$.

a) Für welche a handelt es sich um eine Affinität?

Da $\det A_k = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & k \end{vmatrix} = k + 9 \neq 0$ für $k \in \mathbb{R} \setminus \{-9\}$ gilt, ist die Abbildung f_k für alle $k \in \mathbb{R} \setminus \{-9\}$ eine Affinität.

b) Ist die Abbildung f_5 parallelentreu? Begründen Sie Ihre Antwort!

Für $k = 5$ ist f_5 eine Affinität und somit auch parallelentreu.

c) Begründen Sie, dass die Abbildung f_1 eine Drehstreckung mit dem Streckfaktor $\sqrt{10}$ darstellt. Bestimmen Sie das Drehmass von f_1.

Es gilt

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{10} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Matrix einer Streckung} \\ \text{mit Faktor } \sqrt{10}}} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}}_{\text{Matrix einer Drehung}} .$$

Für das Drehmass φ von f_1 $\varphi = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) \approx 71.56^o$.

d) Untersuchen Sie die Abbildung f_{11} auf Fixelemente.

Da f_{11} eine lineare Abbildung ist, ist $F(0\,|\,0)$ der einzige Fixpunkt von f_{11}.

Die Matrix $A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}$ besitzt die Eigenwerte $k_1 = 2$ und $k_2 = 10$, da

$$\det\left(A_{11} - kE\right) = (1-k)(11-k) + 9 = k^2 - 12k + 20 = (k-2)(k-10)$$

gilt.

Aus dem Gleichungssystem $A_{11}\overrightarrow{v_1} = 2\overrightarrow{v_1}$ oder $\begin{matrix} x - 3y = 2x \\ 3x + 11y = 2y \end{matrix}$ ergibt sich der

Eigenvektor $\overrightarrow{v_1} = c\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Aus dem Gleichungssystem $A_{11}\overrightarrow{v_2} = 10\overrightarrow{v_2}$ oder $\begin{matrix} x - 3y = 10x \\ 3x + 11y = 10y \end{matrix}$ ergibt sich der

Eigenvektor $\overrightarrow{v_1} = c\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Somit sind die Geraden $y = -\frac{1}{3}x$ und $y = -3x$ die Fixgeraden von f_{11}.

	a	b	c	d	Punkte
Aufgabe 7 [Komplexe Funktionen]	1	2	2	4	**9**

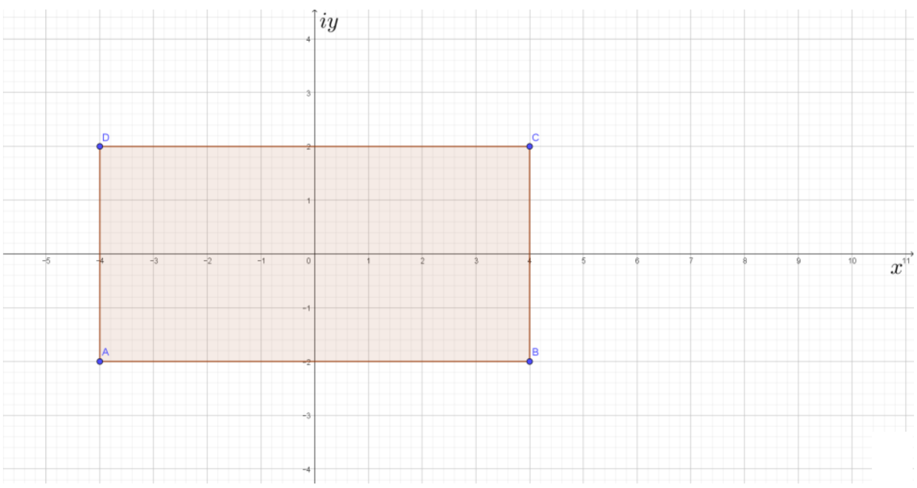
Gegeben sind die Teilmenge der komplexen Ebene

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : |Re(z)| \leq 4, |Im(z)| \leq 2\}$$

und die komplexen Funktionen f und g mit

$$f(z) = \frac{e^{i\pi/2}}{2} z \text{ und } g(z) = z^2.$$

a) Stellen Sie die Menge $\mathcal{D}$ graphisch dar.



b) Begründen Sie, dass die Funktion f eine Drehstreckung beschreibt. Bestimmen Sie das Streckzentrum Z_0, den Drehwinkel α und den Streckfaktor k der Drehstreckung.

Die Funktion f ist eine lineare komplexe Funktion der Form $f(z) = a \cdot z$ mit

$$a = \frac{e^{\frac{i\pi}{2}}}{2} = \tfrac{1}{2}\left(\cos\tfrac{\pi}{2} + i\sin\tfrac{\pi}{2}\right) = \tfrac{1}{2}i.$$

Es gilt $|a| = \frac{1}{2} \neq 1$ und somit entspricht der Funktion f eine Drehstreckung.

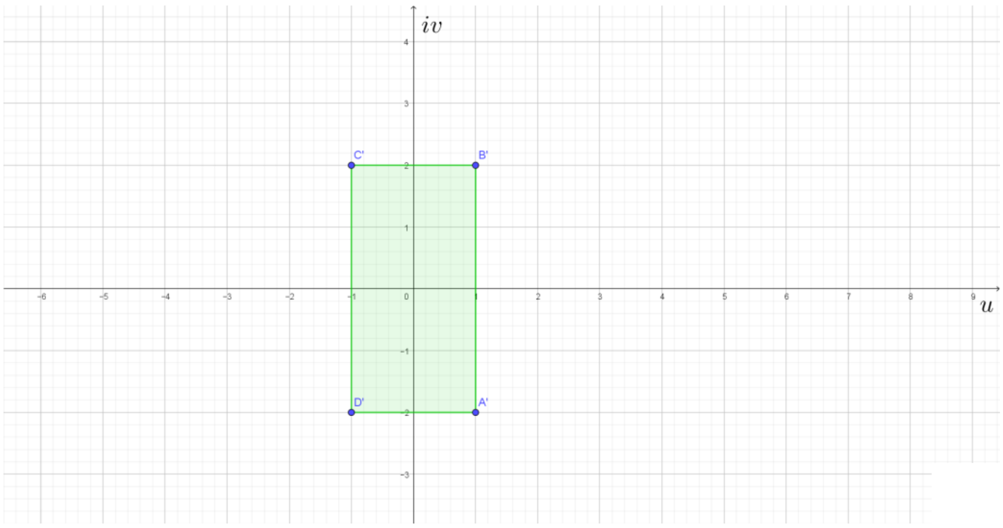
Die Drehstreckung besitzt das Streckzentrum $Z_0(0)$, den Drehwinkel $\alpha = \arg(a) = 90^o$ und den Streckfaktor $k = \frac{1}{2}$.

c) Die Teilmenge $\widetilde{\mathcal{D}}_f$ der komplexen Ebene ist das Bild von $\mathcal{D}$ unter der Funktion f. Bestimmen Sie die Menge $\widetilde{\mathcal{D}}_f$ und stellen Sie diese graphisch dar.

Die Punkte $A'(1-2i)$, $B'(1+2i)$, $C'(-1+2i)$ und $D'(-1-2i)$ sind die Bilder von $A(-4-2i)$, $B(4-2i)$, $C(4+2i)$ und $D(-4+2i)$ unter der Funktion f.

Somit gilt es

$$\widetilde{\mathcal{D}}_f = \{z \in \mathbb{C} : |Re(z)| \leq 1, |Im(z)| \leq 2\}.$$



d) Die Teilmenge $\widetilde{\mathcal{D}}_g$ der komplexen Ebene ist das Bild von $\mathcal{D}$ unter der Funktion g. Bestimmen Sie die Gleichungen der begrenzenden Kurven von $\widetilde{\mathcal{D}}_g$ und stellen Sie die Menge $\widetilde{\mathcal{D}}_g$ graphisch möglichst genau dar.

Es gilt $u + iv = w = f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xy \cdot i$ und somit gilt $u = x^2 - y^2$ und $v = 2xy$.

Für das Bild der begrenzenden Strecken $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ unter der Funktion g gilt $u = 16 - y^2$ und $v = \mp 8y$.

Somit besitzt das Bild der begrenzenden Strecken $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ die Gleichung $u = 16 - \frac{1}{64}v^2$.

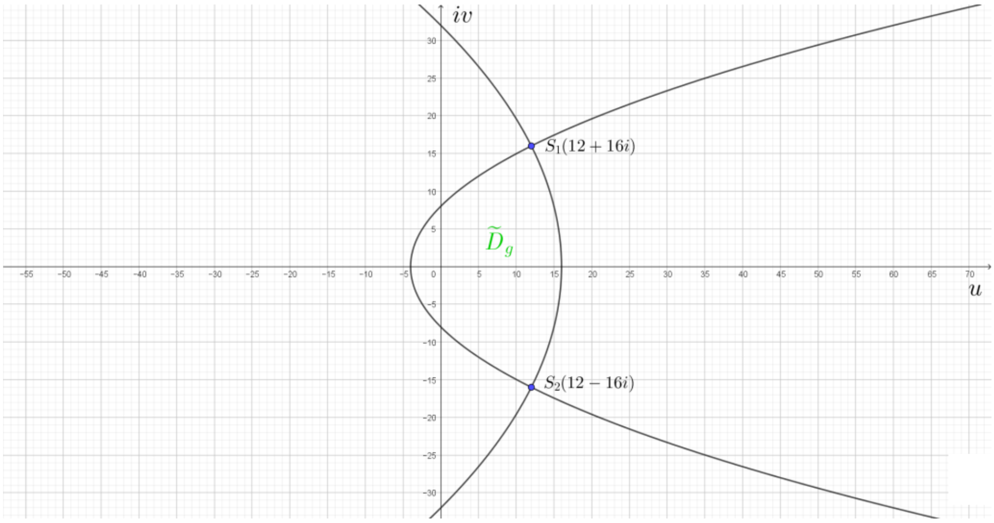
Für das Bild der begrenzenden Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ unter der Funktion g gilt $u = x^2 - 4$ und $v = \pm 4x$.

Somit besitzt das Bild der begrenzenden Strecken $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ die Gleichung $u = \frac{1}{16}v^2 - 4$.

$u = 16 - \frac{1}{64}v^2$: nach links geöffnete Parabel mit dem Scheitelpunkt (16) und den Schnittpunkten mit der iv-Achse (± 32).

$u = \frac{1}{16}v^2 - 4$: nach rechts geöffnete Parabel mit dem Scheitelpunkt (-4) und den Schnittpunkte mit der iv-Achse (± 8).

Da die Gleichung $16 - \frac{1}{64}v^2 = \frac{1}{16}v^2 - 4$ die Lösungen $v_{1,2} = \pm 16$ besitzt, schneiden sich die beiden Parabel in den Punkten $S_1(12+16i)$ und $S_2(12-16i)$.



	a	b	c	Punkte
Aufgabe 8 [Kegelschnitte]	1	3	3	**7**

Die Ellipse $x^2 + 5y^2 = 20$ und eine Hyperbel haben die Brennpunkte und den Punkt $P(\sqrt{10} \mid y_P)$ mit $y_P > 0$ gemeinsam.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Brennpunkte der beiden Kurven.

Aus der Gleichung der Ellipse $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{4} = 1$ ergibt sich $e^2 = 20 - 4 = 16$ und somit beträgt die lineare Exzentrizität $e = 4$.

Die beiden Kurven haben dann die gemeinsamen Brennpunkte $F_1(-4 \mid 0)$ und $F_2(4 \mid 0)$.

b) Bestimmen Sie die Mittelpunktsgleichung der Hyperbel sowie die Gleichungen ihrer Asymptoten.

Aus $10+5y_P^2=20$ ergibt sich $y_P=\sqrt{2}$.

Die Hyperbelgleichung lautet $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, wobei $a^2+b^2=e^2=16$ gilt.

Da der Punkt P auf der Hyperbel liegt, gilt $\frac{10}{a^2}-\frac{2}{b^2}=1$ oder $10b^2-2a^2=a^2b^2$.

Aus $a^2=16-b^2$ und $10b^2-2a^2=a^2b^2$ ergibt sich die Gleichung

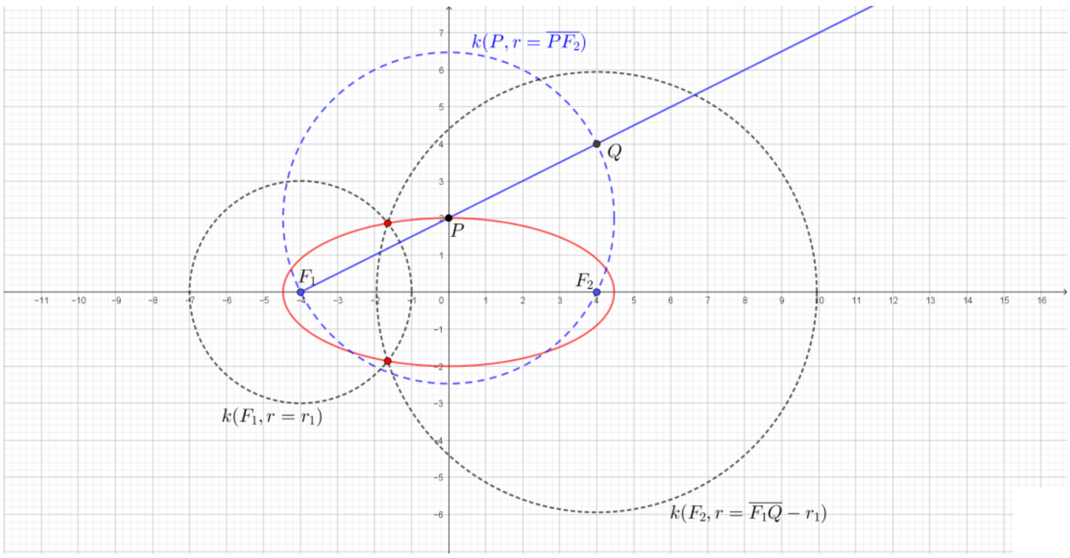
$$b^4-4b^2-32=0.$$

Diese Gleichung besitzt die Lösung $b^2=8$.

Somit bekommt man $a^2=8$ und die Hyperbelgleichung $x^2-y^2=8$.

Die Gleichungen der Asymptoten lauten $y=\pm x$.

c) Skizzieren Sie die Kurve der Ellipse, indem Sie einige Punkte sichtbar mit Zirkel und Lineal konstruieren. Erklären Sie die Konstruktion.



Die Punkte auf der Ellipse werden mit Hilfe von den Brennpunkten $F_1(-4\,|\,0)$ und $F_2(4\,|\,0)$ sowie dem auf der Ellipse liegenden Punkt $P(0\,|\,2)$ konstruiert. Zuerst wird der Punkt Q als Schnittpunkt von dem Kreis $k(P, r=\overline{PF_2})$ und der Geraden durch die Punkte F_1 und P. Somit wird die Länge $2a=\overline{F_1P}+\overline{F_2P}$ konstruiert. Die Punkte auf der Ellipse werden als Schnittpunkte von Kreisen $k(F_1, r=r_1)$ und $k(F_2, r=2a-r_1)$ konstruiert.

	a	b	c	Punkte
Aufgabe 9 [Differentialgleichungen]	1	3	2	**6**

In einem zylinderförmigen Gefäss befinden sich 5000 g Wasser. Im Wasser sind 100 g Kochsalz gelöst. Ein Rührwerk sorgt für stets gleichmässige Durchmischung. Durch eine Röhre fliessen pro Minute 60 g Wasser zu, während durch eine zweite Röhre gleichzeitig pro Minute 60 g salzhaltiges Wasser abfliessen.

Es sei $S(t)$ die zur Zeit t (in min) im Gefäss vorhandene Salzmenge (in g).

a) Drücken Sie die Menge Salz (in g), welche zur Zeit t in 60 g Wasser im durchgemischten Tank gelöst ist mit Hilfe von $S(t)$ aus.

In 60 g Wasser ist zur Zeit t die Menge $\frac{60}{5\,000}\ S(t)\ g = 0.012\ S(t)\ g$ gelöst.

b) Begründen Sie, dass $S(t)$ die Differentialgleichung $S'(t) = -0.012S(t)$ erfüllt. Wie lässt sich die im Gefäss vorhandene Salzmenge für jeden Wert von t berechnen?

Da $S(t+\Delta t) \approx S(t) - 0.012S(t) \cdot \Delta t$ gilt, gilt $\frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t} \approx -0.012S(t)$

Mit $\Delta t \to 0$ ergibt sich $S'(t) = -0.012S(t)$.

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet $S(t) = C \cdot e^{-0.012t}$.

Mit $100 = S(0) = C$ ergibt sich $S(t) = 100 \cdot e^{-0.012t}$.

c) Wie lange dauert es, bis sich nur noch 10 g Salz im Gefäss befinden?

Die Lösung der Gleichung $10 = 100 \cdot e^{-0.012t}$ lautet $t = \frac{\ln(0.1)}{-0.012} \approx 191.88$.

Somit dauert es ca. 191.88 Minuten oder 3 Stunden und 12 Minuten bis sich nur noch 10 g Salz im Gefäss befinden.

Kann das Salz auf die angegebene Weise gänzlich aus dem Gefäss entfernt werden?

Nein, da $S(t) = 0$ nur für $t \to +\infty$ gilt.