KANTON LUZERN
Bildungs- und Kulturdepartement

Kantonsschule Alpenquai Luzern

Schriftliche Maturitätsprüfung 2019

Fach	Grundlagenfach Mathematik
Prüfende Lehrperson	Teodora Mitkova teodora.mitkova@edulu.ch
Klasse	6e
Prüfungsdatum	24.05.2019
Prüfungsdauer	3 Stunden
Erlaubte Hilfsmittel	- Formelsammlung „Formeln, Tabellen, Begriffe" - Taschenrechner: TI30X - Pro MV (ohne Handbuch)
Anweisungen zur Lösung der Prüfung	- Es wird Wert auf eine saubere Darstellung gelegt. - Jede Aufgabe soll einen vollständigen und nachvollziehbaren Lösungsweg enthalten. - Jede Aufgabe soll auf einem neuen Bogen begonnen werden. - Jeder Bogen ist mit dem Namen zu beschriften.
Anzahl erreichbarer Punkte	Aufgabe 1: 10 Aufgabe 2: 10 Aufgabe 3: 10 Aufgabe 4: 10 Total: 40 Für die Note 6 werden mindestens 36 Punkte benötigt.
Anzahl Seiten (inkl. Titelblatt)	4

…………………………………………………………	………………	………………
Name, Vorname	Klasse	Nummer

	a	b	c	d	e	f	Punkte
Aufgabe 1 [Vektorgeometrie]	1	2.5	1	2.5	1	2	**10**

Gegeben sind Ebenen $E_1 : \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $E_2 : x - y + z = 2$.

a) Stellen Sie die Ebene E_1 durch eine Koordinatengleichung dar.

b) Begründen Sie, dass sich die Ebenen E_1 und E_2 schneiden und bestimmen Sie den Schnittwinkel sowie eine Gleichung der Schnittgeraden g.

c) Bestimmen Sie eine Parametergleichung einer Ebene E_3, die die Schnittgerade g aus der Teilaufgabe b) enthält und senkrecht auf E_2 steht.

d) Die Ebene E_1 schneidet die x-Achse im Punkt A, die y-Achse im Punkt B und die z-Achse im Punkt C. Berechnen Sie den Umfang des Dreiecks ABC.

e) Die Punkte A, B, C und der Ursprung des Koordinatensystems bilden eine Pyramide. Berechnen Sie das Volumen dieser Pyramide.

f) Die Punkte A, B, P und der Ursprung des Koordinatensystems bilden ein Trapez mit parallelen Seiten AP und OB. Der Flächeninhalt vom Trapez beträgt 5. Bestimmen Sie die Koordinaten aller solchen Punkte P.

	a	b	c	d	e	Punkte
Aufgabe 2 [Analysis]	1	3	1	1	4	**10**

Gegeben ist die Funktion $f: y = f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

a) Bestimmen Sie die Nullstellen und die Polstellen der Funktion f.

b) Bestimmen Sie die Extremal- und Wendepunkte der Funktion f.

c) Bestimmen Sie die schiefe Asymptote der Funktion f.

d) Zeichnen Sie mithilfe der Erkenntnisse aus den Teilaufgaben a), b) und c), den Graphen von f für $-4 \le x \le 4$ (1 Einheit = 2 Häuschen).

e) Der Ursprungspunkt und ein im 1. Quadranten liegender Punkt Q des Graphen von f seien diagonal gegenüberliegende Ecken eines achsenparallelen Rechtecks. Bestimmen Sie den Eckpunkt Q des Rechtecks mit dem kleinsten Flächeninhalt und berechnen Sie diesen.

	a	b	c	d	e	Punkte
Aufgabe 3 [Analysis]	2	3	2	1	2	**10**

Gegeben ist die Funktion $f: y = f(x) = x(2 - \ln x)$.

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich sowie alle Nullstellen der Funktion f.

b) Bestimmen Sie die Extrempunkte der Funktion f.

c) Zeichnen Sie mithilfe der Erkenntnisse aus den Teilaufgaben a) und b), den Graphen von f für $1 \le x \le 9$ (1 Einheit = 2 Häuschen).

d) Zeigen Sie, dass die Funktion $F: F(x) = \dfrac{5}{4}x^2 - \dfrac{1}{2}x^2 \cdot \ln x$ eine Stammfunktion von f ist.

e) Der Graph von f, die Parallele zur y-Achse durch den Punkt $P(1 \mid 0)$ und die Tangente im Extremalpunkt des Graphen von f begrenzen zusammen eine Fläche. Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.

	a	b	c	d	Punkte
Aufgabe 4 [Stochastik]	4	1	2	3	**10**

Ein Kreuzfahrtschiff hat vier Decks mit je 40 Kabinen. Auf jedem Deck findet man zwei gegenüberliegende Kabinenreihen mit je 20 Kabinen.

a) Es sind noch alle Kabinen frei.

a_1) Eine Reisegruppe möchte 6 Kabinen buchen, die auf demselben Deck liegen. Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Buchung?

a_2) Eine andere Reisegruppe möchte 6 direkt nebeneinander (in einer Reihe) liegende Kabinen buchen. Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Buchung?

a_3) Vier Kreuzfahrtteilnehmer buchen je eine Kabine auf dem Schiff. Die Kabinen werden den Passagieren nach dem Zufallsprinzip zugewiesen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle vier Kabinen auf demselben Deck liegen?

b) Es sind noch 20 Kabinen frei. Ein Reiseveranstalter bucht 5 Kabinen für 5 verschiedene Paare. Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Buchung?

c) Die Reederei weiss aus Erfahrung, dass eine Kabine unabhängig von den anderen mit einer Wahrscheinlichkeit vom 5% storniert wird. Deshalb überbucht sie die Kreuzfahrten und nimmt 163 Buchungen für die Kabinen auf dem Kreuzfahrtschiff entgegen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es zu einer Überbuchung kommt?

d) In einer Bar auf dem Kreuzfahrtschiff wird den Gästen ein kleines Glücksspiel angeboten. Bei einem Spieleinsatz von 3 Fr. kann man drei (faire) Geldstücke (1 Fr., 2 Fr., 5 Fr.) gleichzeitig werfen. Der Einsatz geht verloren, aber diejenigen Münzen, welche "Zahl" zeigen, darf man behalten. Wie viel gewinnt ein Spieler durchschnittlich bei einem solchen Spiel?

	a	b	c	d	e	f	Punkte
Aufgabe 1 [Vektorgeometrie]	1	2.5	1	2.5	1	2	**10**

Gegeben sind Ebenen $E_1 : \vec{r} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ und $E_2 : x - y + z = 2$.

a) Stellen Sie die Ebene E_1 durch eine Koordinatengleichung dar.

Aus $x = 1 - t$, $y = 2t - s$ und $z = 1 + t + s$ ergeben sich $t = 1 - x$ und $y + z = 1 + 3t$.

Somit bekommt man die Koordinatengleichung $E_1 : 3x + y + z = 4$.

b) Begründen Sie, dass sich die Ebenen E_1 und E_2 schneiden und bestimmen Sie den Schnittwinkel sowie eine Gleichung der Schnittgeraden g.

Die Ebenen schneiden sich, da die Normalvektoren $\overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{n_2} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ nicht kollinear sind.

Da $\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|} = \frac{3}{\sqrt{33}}$ mit $\alpha = \measuredangle(E_1, E_2)$ gilt, ist $\alpha \approx 58.52^o$.

Aus $x = 1 - t$, $y = 2t - s$, $z = 1 + t + s$ und $x - y + z = 2$ ergibt sich $t = s$.

Für die Gleichung der Schnittgeraden g gilt dann $\vec{r} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$.

c) Bestimmen Sie eine Parametergleichung einer Ebene E_3, die die Schnittgerade g aus der Teilaufgabe b) enthält und senkrecht auf E_2 steht.

Da $\overrightarrow{n_2} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ ein Richtungsvektor von E_3 ist, gilt $E_3 : \vec{r} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

d) Die Ebene E_1 schneidet die x-Achse im Punkt A, die y-Achse im Punkt B und die z-Achse im Punkt C. Berechnen Sie den Umfang des Dreiecks ABC.

Da $y_A = 2t - s = 0$ und $z_A = 1 + t + s = 0$ gelten, ergibt sich $t = -\frac{1}{3}$ und somit $x_A = 1 - t = \frac{4}{3}$, d.h. $A\left(\frac{4}{3} \,|\, 0 \,|\, 0\right)$.

Da $x_B = 1 - t = 0$ und $z_B = 1 + t + s = 0$ gelten, ergeben sich $t = 1$ und $s = -2$ und somit $y_B = 2t - s = 4$, d.h. $B(0 \,|\, 4 \,|\, 0)$.

Da $x_C = 1 - t = 0$ und $y_C = 2t - s = 0$ gelten, ergeben sich $t = 1$ und $s = 2$ und somit $z_C = 1 + t + s = 4$, d.h. $C(0 \,|\, 0 \,|\, 4)$.

Für den Umfang des Dreiecks ABC bekommt man dann

$$U = |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}| + |\overrightarrow{CA}| = \sqrt{\frac{16}{9} + 16} + \sqrt{16 + 16} + \sqrt{\frac{16}{9} + 16} \approx 14.1.$$

e) Die Punkte A, B, C und der Ursprung des Koordinatensystems bilden eine Pyramide. Berechnen Sie das Volumen dieser Pyramide.

Da $OA \perp OB$ und $OC \perp E_{OAB}$ gelten, ergeben sich $A_{OAB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot 4 = \frac{8}{3}$ und

$V = \frac{1}{3} \cdot A_{OAB} \cdot |\overrightarrow{OC}| = \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{3} \cdot 4 = \frac{32}{9}$.

f) Die Punkte A, B, P und der Ursprung des Koordinatensystems bilden ein Trapez mit parallelen Seiten AP und OB. Der Flächeninhalt vom Trapez beträgt 5. Bestimmen Sie die Koordinaten aller solchen Punkte P.

Da AP und OB die Grundseiten vom Trapez sind gilt $OB \parallel AP$ und somit $P\left(\frac{4}{3} \mid y_P \mid 0\right)$.

Für den Flächeninhalt gilt dann $A_{OAPB} = \frac{|\overrightarrow{OB}|+|\overrightarrow{AP}|}{2} \cdot |\overrightarrow{OA}| = \frac{4+|y_P|}{2} \cdot \frac{4}{3} = 5$ und somit ergibt sich $|y_P| = 3.5$.

Man bekommt zwei mögliche Punkte: $P_1\left(\frac{4}{3} \mid 3.5 \mid 0\right)$ und $P_2\left(\frac{4}{3} \mid -3.5 \mid 0\right)$.

	a	b	c	d	e	Punkte
Aufgabe 2 [Analysis]	1	3	1	1	4	**10**

Gegeben ist die Funktion $f: y = f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

a) Bestimmen Sie die Nullstellen und die Polstellen der Funktion f.

$x^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ und somit ist $x = -1$ die einzige Nullstelle von f.

$x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ und somit ist $x = 0$ die einzige Polstelle von f.

b) Bestimmen Sie die Extremal- und Wendepunkte der Funktion f.

$$f'(x) = \frac{3x^2 \cdot x^2 - 2x(x^3+1)}{x^4} = \frac{x^4 - 2x}{x^4} = 1 - \frac{2}{x^3} \quad , \quad f''(x) = \frac{6}{x^4}$$

Da $f''(x) = 0$ keine Lösung hat, besitzt die Funktion f keine Wendepunkte.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 2 = 0 \Leftrightarrow x_E = \sqrt[3]{2} \approx 1.26$

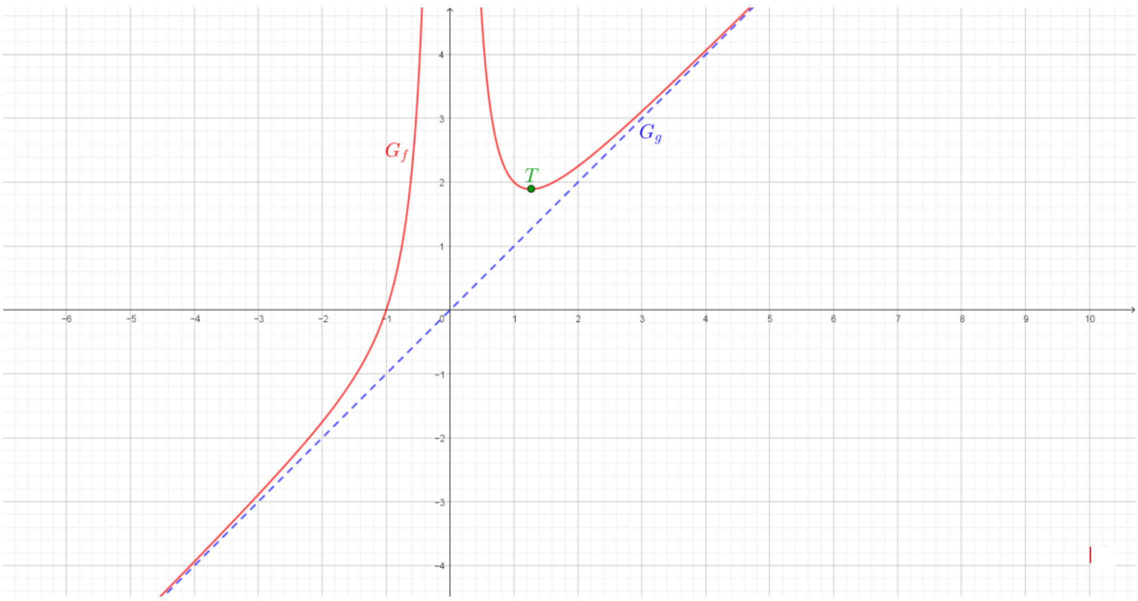
Da $f''\left(\sqrt[3]{2}\right) > 0$ gilt, ist $x_E = \sqrt[3]{2}$ eine lokale Minimumstelle von f.

Der Punkt $T\left(\sqrt[3]{2} \approx 1.26 \middle/ \frac{3}{\sqrt[3]{4}} \approx 1.89\right)$ ist der Tiefpunkt von f.

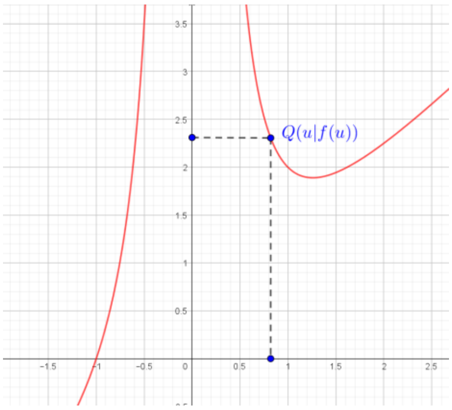
c) Bestimmen Sie die schiefe Asymptote der Funktion f.

Es gilt $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x^3+1}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(x + \dfrac{1}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} x$. Somit ist die Funktion g mit $g(x) = x$ die schiefe Asymptote der Funktion f.

d) Zeichnen Sie mithilfe der Erkenntnisse aus den Teilaufgaben a), b) und c), den Graphen von f für $-4 \le x \le 4$ (1 Einheit = 2 Häuschen).



e) Der Ursprungspunkt und ein im 1. Quadranten liegender Punkt Q des Graphen von f seien diagonal gegenüberliegende Ecken eines achsenparallelen Rechtecks. Bestimmen Sie den Eckpunkt Q des Rechtecks mit dem kleinsten Flächeninhalt und berechnen Sie diesen.



$$Q(u\,|\,f(u)),\ u>0$$

$$A(u)=u\cdot f(u)=\frac{u^3+1}{u}=u^2+\frac{1}{u}$$

$$A'(u)=\frac{2u^3-1}{u^2}=2u-\frac{1}{u^2}$$

$$A''(u)=2+\frac{2}{u^3}$$

$$A'(u)=0\Leftrightarrow 2u^3-1=0\Leftrightarrow u_E=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\approx 0.79$$

Da $A''\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)=6>0$ gilt, ist $u_E=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ eine Minimumstelle von A.

Somit ergibt sich $Q\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\approx 0.79 \middle/ \frac{3\sqrt[3]{4}}{2}\approx 2.38\right)$.

Der kleinste Flächeninhalt beträgt $A_{\min}=A\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)=\frac{3\sqrt[3]{2}}{2}\approx 1.89$.

	a	b	c	d	e	Punkte
Aufgabe 3 [Analysis]	2	3	2	1	2	**10**

Gegeben ist die Funktion $f: y = f(x) = x(2 - \ln x)$.

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich sowie alle Nullstellen der Funktion f.

Definitionsbereich: $D_f = \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$

$x(2 - \ln x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, 2 - \ln x = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = e^2 \approx 7.39$

Da $x_1 = 0 \notin D_f$ gilt, ist $x_2 = e^2 \approx 7.39$ die einzelne Nullstelle von f.

b) Bestimmen Sie die Extrempunkte der Funktion f.

$f'(x) = 2 - \ln x + x\left(-\frac{1}{x}\right) = 1 - \ln x \quad , \quad f''(x) = -\frac{1}{x}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow x_E = e \approx 2.72$

Da $f''(e) = -\frac{1}{e} < 0$ gilt, ist $x_E = e$ eine lokale Maximumstelle von f.

Der Punkt $H\left(e \approx 2.72 / f(e) = e \approx 2.72\right)$ ist der Hochpunkt von f.

c) Zeichnen Sie mithilfe der Erkenntnisse aus den Teilaufgaben a) und b), den Graphen von f für $1 \leq x \leq 9$ (1 Einheit = 2 Häuschen).

$f(1) = 2 \quad , \quad f(9) = 9(2 - \ln 9) \approx -1.78$

d) Zeigen Sie, dass die Funktion $F: F(x) = \frac{5}{4}x^2 - \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln x$ eine Stammfunktion von f ist.

$$F'(x) = \frac{5}{4} \cdot 2x - \frac{1}{2}\left(2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x}\right) = \frac{5}{2}x - x \cdot \ln x - \frac{1}{2}x = 2x - x \cdot \ln x = f(x)$$ [1]

e) Der Graph von f, die Parallele zur y-Achse durch den Punkt $P(1\,|\,0)$ und die Tangente im Extremalpunkt des Graphen von f begrenzen zusammen eine Fläche. Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.

$$A = \int_1^e \left(e - x(2 - \ln x)\right) dx = \left[e \cdot x - \left(\frac{5}{4}x^2 - \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln x \right) \right]_1^e = e^2 - \left(\frac{5}{4}e^2 - \frac{1}{2}e^2 \right) - \left(e + \frac{5}{4} \right)$$

$$= \frac{1}{4}e^2 - e - \frac{5}{4} \approx 0.38$$

	a	b	c	d	Punkte
Aufgabe 4 [Stochastik]	4	1	2	3	**10**

Ein Kreuzfahrtschiff hat vier Decks mit je 40 Kabinen. Auf jedem Deck findet man zwei gegenüberliegende Kabinenreihen mit je 20 Kabinen.

a) Es sind noch alle Kabinen frei.

a_1) Eine Reisegruppe möchte 6 Kabinen buchen, die auf demselben Deck liegen. Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Buchung?

Es gibt $4\cdot\binom{40}{6}=15\ 353\ 520$ Möglichkeiten.

a_2) Eine andere Reisegruppe möchte 6 direkt nebeneinander (in einer Reihe) liegende Kabinen buchen. Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Buchung?

Es gibt $4\cdot 2\cdot 15=120$ Möglichkeiten.

a_3) Vier Kreuzfahrtteilnehmer buchen je eine Kabine auf dem Schiff. Die Kabinen werden den Passagieren nach dem Zufallsprinzip zugewiesen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle vier Kabinen auf demselben Deck liegen?

P("alle 4 Kabinen auf demselben Deck") = $4\cdot\dfrac{\binom{40}{4}}{\binom{160}{4}}\approx 0.0139\approx 0.01$.

b) Es sind noch 20 Kabinen frei. Ein Reiseveranstalter bucht 5 Kabinen für 5 verschiedene Paare . Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Buchung?

Es gibt $20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16=1\ 860\ 480$ Möglichkeiten.

c) Die Reederei weiss aus Erfahrung, dass eine Kabine unabhängig von den anderen mit einer Wahrscheinlichkeit vom 5% storniert wird. Deshalb überbucht sie die Kreuzfahrten und nimmt 163 Buchungen für die Kabinen auf dem Kreuzfahrtschiff entgegen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es zu einer Überbuchung kommt?

P("Überbelegung") = $\sum_{k=161}^{163}\binom{163}{k}\cdot 0.95^k\cdot 0.05^{163-k}\approx 0.0108\approx 0.01$.

d) In einer Bar auf dem Kreuzfahrtschiff wird den Gästen ein kleines Glücksspiel angeboten. Bei einem Spieleinsatz von 3 Fr. kann man drei (faire) Geldstücke (1 Fr., 2 Fr., 5 Fr.) gleichzeitig werfen. Der Einsatz geht verloren, aber diejenigen Münzen, welche "Zahl" zeigen, darf man behalten. Wie viel gewinnt ein Spieler durchschnittlich bei einem solchen Spiel?

X sei der Gewinn pro Spiel.

Die Zufallsgrösse X nimmt die Werte **-3**, 1 - 3 = **-2**, 2 – 3 = **-1**, 5 – 3 = **2**, 3 – 3 = **0**, 6 – 3 = **3**, 7 – 3 = **4** und 8 – 3 = **5** an.

Es gilt

$$P(X=-3)=P(X=-2)=P(X=-1)=P(X=0)=P(X=2)=P(X=3)=$$

$$P(X=4)=P(X=5)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}.$$

Die Berechnung des Erwartungswertes von X ergibt

$$E(X)=\frac{1}{8}\left(-3-2-1+0+2+3+4+5\right)=1.$$

Also gewinnt ein Spieler durchschnittlich 1 Fr.