KANTON LUZERN
Bildungs- und Kulturdepartement

Kantonsschule Alpenquai Luzern

Schriftliche Maturitätsprüfung 2019

Fach	Grundlagenfach Mathematik
Prüfende Lehrpersonen	Sibille Burkard sibille.burkard@edulu.ch Patrik Hess patrik.hess@edulu.ch Markus T. Schmid markust.schmid@edulu.ch
Klassen	6b, 6d, 6f, 7s
Prüfungsdatum	Freitag, 24. Mai 2019
Prüfungsdauer	180 Minuten
Erlaubte Hilfsmittel	- Formelsammlung «Formeln, Tabellen, Begriffe» - Taschenrechner: TI-30X Pro MV (ohne Handbuch), (oder vergleichbarer Rechner)
Anweisungen zur Lösung der Prüfung	- Es wird Wert auf eine saubere Darstellung gelegt. - Jede Aufgabe soll einen vollständigen und nachvollziehbaren Lösungsweg enthalten. - Jede Aufgabe soll auf einem neuen Bogen begonnen werden. - Jeder Bogen ist mit dem Namen zu beschriften.
Anzahl erreichbarer Punkte	Aufgabe 1: 4 Aufgabe 2: 4 Aufgabe 3: 11 Aufgabe 4: 13.5 Aufgabe 5: 13.5 Total: 46 Für die Note 6 werden mindestens 42 Punkte benötigt.
Anzahl Seiten (inkl. Titelblatt)	5

Punkte

Aufgabe 1 – Analysis **4**

Der Graph einer ganzrationalen Funktion vom Grad 3 schneidet die y-Achse bei $\frac{4}{3}$ und hat dort einen Hochpunkt. Ausserdem berührt der Graph der Funktion die x-Achse bei -2.

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung, deren Graph die obigen Eigenschaften erfüllt.

Punkte

Aufgabe 2 – Analysis **4**

Gegeben ist die Funktion $f(x) = a \cdot x^2 + 4$ mit $a < 0$.

In das eingeschlossene Flächenstück zwischen dem Graph von f und der x-Achse soll ein Rechteck grösstmöglichen Umfangs so einbeschrieben werden, dass jede Seite zu einer der Koordinatenachsen parallel verläuft.

Berechnen Sie die Koordinaten der oberen Ecke im 1. Quadranten in Abhängigkeit von a.

	a	b	c	d	e	f	Punkte
Aufgabe 3 – Analysis	1.5	1.5	4	1.5	1	1.5	**11**

Die Funktion f ist gegeben durch $f(x)=(x-3)\cdot e^x$, wobei e die Eulersche Zahl ist.

Ihre ersten drei Ableitungsfunktionen lauten $f'(x)=(x-2)\cdot e^x$, $f''(x)=(x-1)\cdot e^x$ und $f'''(x)=x\cdot e^x$.

a) Weisen Sie ausführlich mit Hilfe von Ableitungsregeln nach, dass Sie für die erste Ableitungsfunktion von f die obige Funktion f' erhalten.

b) Die Gerade g verläuft durch die Schnittpunkte A und B des Graphs von f mit den beiden Koordinatenachsen. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von g.

c) Berechnen Sie die Koordinaten der Extrem- und Wendepunkte des Graphs von f.

d) Zeichnen Sie unter Einbezug Ihrer Antworten zu den Teilaufgaben b) und c) die Graphen von f und g für $-6 \leq x \leq 3.25$ (1 Einheit ≙ 2 Häuschen).

e) Die Gerade g sowie der Graph von f schliessen eine endliche Fläche ein.
Bestimmen Sie das Intergral, welches den Inhalt dieser Fläche beschreibt und berechnen Sie ohne Angabe der Stammfunktion dieses Integral.

f) Die in e) beschriebene Fläche rotiert nun um die x-Achse.
Bestimmen Sie das Intergral, welches das Volumen des entstandenen Rotationskörpers beschreibt und berechnen Sie ohne Angabe der Stammfunktion dieses Integral.

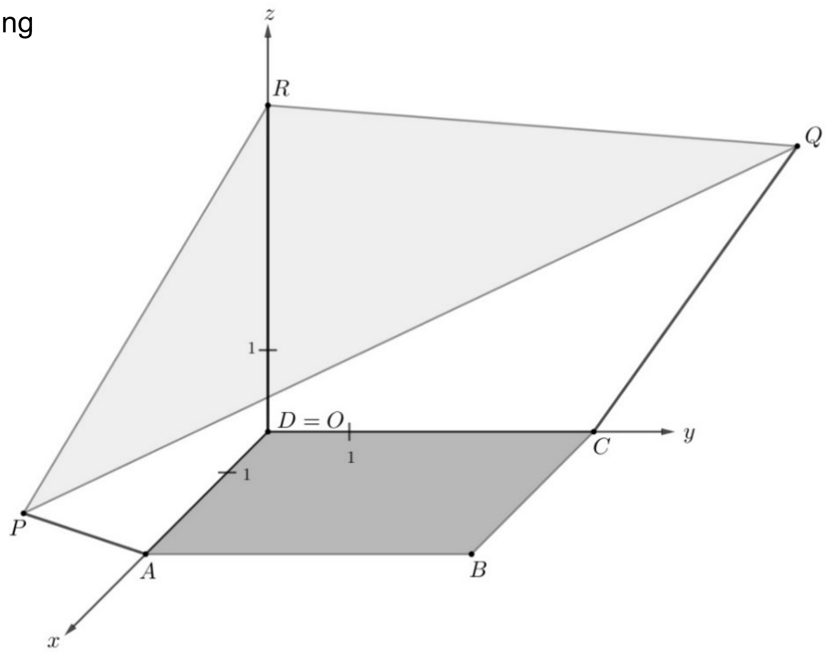
	a	b	c	d	e	f	Punkte
Aufgabe 4 – Vektorgeometrie	0.5	1.5	4	2.5	2.5	2.5	**13.5**

Auf einem Spielplatz wird über einem Sandkasten ein dreieckiges Sonnensegel montiert, um spielende Kinder vor der Sonneneinstrahlung zu schützen. Dazu werden an drei Ecken des Sandkastens Metallstangen im Boden verankert, an deren Enden das Sonnensegel befestigt wird.

Der Sandkasten wird durch ein Rechteck mit den Eckpunkten $A(3\,|\,0\,|\,0)$, $B(3\,|\,4\,|\,0)$, $C(0\,|\,4\,|\,0)$ und $D = O(0\,|\,0\,|\,0)$ beschrieben. Er befindet sich in der xy-Ebene. Das Sonnensegel wird durch das ebene Dreieck mit den Eckpunkten $P(6\,|\,0\,|\,2)$, $Q(-1\,|\,6\,|\,3)$ und $R(0\,|\,0\,|\,4)$ dargestellt.

Die entsprechende Ebenengleichung lautet $E: \quad 3x + 2y + 9z = 36$.

Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Realität.



a) Zeigen Sie rechnerisch, dass der Punkt Q in der Ebene E liegt.

b) Weisen Sie rechnerisch nach, dass das Dreieck PQR bei R keinen rechten Winkel hat.

c) Berechnen Sie den Abstand des Punkts Q zur Gerade g, welche durch die Punkte P und R verläuft.

d) Wie schwer ist das Segel, wenn 1 m^2 des Sonnensegelstoffs 150 g wiegt?

e) Der Hersteller empfiehlt zum optimalen Ablauf des Regenwassers, dass das Segel gegenüber dem horizontalen Boden einen Winkel von mindestens 8 Grad aufweist. Untersuchen Sie, ob das Sonnensegel ausreichend geneigt ist.

f) Am 24. Mai 2019 fallen Sonnenstrahlen um 11 Uhr aus der Richtung QC in parallelen Strahlen auf das Sonnensegel.
Berechnen Sie die Koordinaten des Schattenpunkts P' von P auf dem Boden.

	a1	a2	b1	b2	b3	c	**Punkte**
Aufgabe 5 – Wahrscheinlichkeitsrechnung	1.5	2	3	2.5	1.5	3	**13.5**

Bei einem Fussball-Turnier stehen die Mannschaften FC Top und FC Fit im Endspiel.

a) Der Trainer des FC Top stellt seine Mannschaft neu zusammen. Hierfür wählt er vier der sieben verfügbaren Abwehrspieler, vier der fünf Mittelfeldspieler, zwei der sechs Angriffsspieler und einer der drei Torhüter aus.

a1) Wie viele Möglichkeiten hat der Trainer, seine Mannschaft zusammenzustellen?

a2) Vor dem Spiel sollen sich die elf ausgewählten Spieler für ein Gruppenfoto so in eine Reihe stellen, dass die Abwehr-, die Mittelfeld- und die Angriffsspieler jeweils nebeneinanderstehen und der Torwart am Rand steht. Wie viele Möglichkeiten gibt es hierfür?

b) Da das Spiel nach Ablauf der regulären Spielzeit unentschieden steht, folgt ein Elfmeterschiessen. Im Folgenden kann vereinfachend davon ausgegangen werden, dass jeder Spieler des FC Top mit einer Wahrscheinlichkeit von 75 % einen Elfmeter verwandelt, während jeder Spieler des FC Fit eine Trefferquote von 70 % hat.

b1) Wie viele Elfmeter muss die Mannschaft des FC Top mindestens schiessen, damit sie mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99.9 % mindestens einen Treffer erzielt? [Die einzelnen Schritte zur Lösung der Ungleichung werden verlangt.]

Als Alternativen zum üblichen Ablauf eines Elfmeterschiessens werden die beiden in den folgenden Teilaufgaben b2) und b3) behandelten Verfahren vorgeschlagen.

b2) Beide Mannschaften schiessen je dreimal. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieses Elfmeterduell unentschieden endet.

b3) Die Schützen der beiden Mannschaften treten paarweise gegeneinander an: Ein Spieler des FC Top und einer des FC Fit schiessen je einmal. Liegt danach eine Mannschaft in Führung, endet das Spiel sofort, anderenfalls wird das Verfahren mit dem nächsten Spielerpaar wiederholt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit würde bei diesem Vorgehen nach drei angetretenen Paaren immer noch kein Sieger feststehen?

c) Zur Steigerung der Motivation der Spieler trifft die Clubleitung des FC Top für die kommenden Spiele folgende Regelung mit der Mannschaft:
Für jeden erzielten Treffer bei den ersten drei Schüssen aufs gegnerische Tor erhält die Mannschaft Fr. 10'000.– als Prämie. Falls aber keiner der drei Schüsse zu einem Treffer führt, zahlt die Mannschaft Fr. 1'000.– als «Strafe».

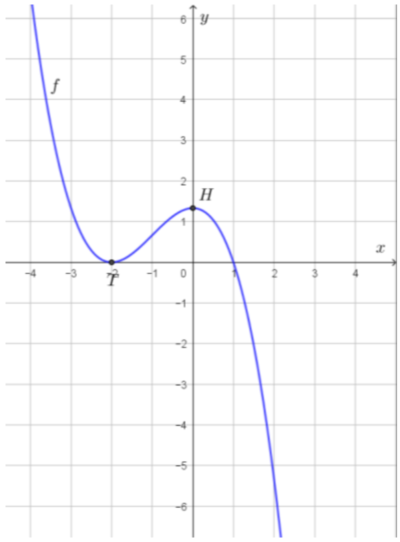
Mit welchen Kosten hat die Clubleitung im Schnitt pro Spiel zu rechnen, wenn die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer pro Schuss aufs gegnerische Tor 5 % beträgt?

Aufgabe 1 — 4 Punkte

Ganzrationale Funktion f vom Grad 3: $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

Die Funktion f und ihre erste Ableitungsfunktion $f'(x)=3ax^2+2bx+c$ müssen folgende vier Bedingungen erfüllen:

$$\begin{array}{ll} f(0)=\tfrac{4}{3}: & \left|\begin{array}{rl} d & =\tfrac{4}{3} \\ c & =0 \\ -8a+4b-2c+d & =0 \\ 12a-4b+\ \ c & =0 \end{array}\right| \\ f'(0)=0: & \\ f(-2)=0: & \\ f'(-2)=0: & \end{array}$$



Vereinfacht lautet das Gleichungssystem:

$$\left|\begin{array}{l} -8a+4b=-\tfrac{4}{3} \\ 12a-4b=0 \end{array}\right| \Rightarrow \quad a=-\tfrac{1}{3} \ \ und \ \ b=-1$$

d.h. $\underline{\underline{f(x)=-\tfrac{1}{3}x^3-x^2+\tfrac{4}{3}}}$

Aufgabe 2 — 4 Punkte

$P(z\,/\,f(z))$, $z>0$ Punkt im 1. Quadranten

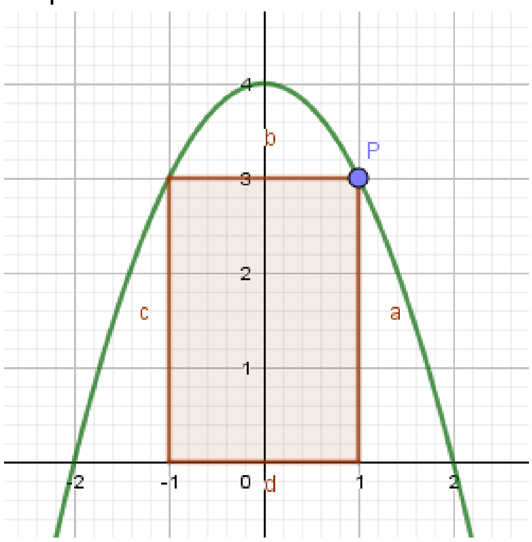
$$U(z) = 4z+2f(z) = 2az^2+4z+8$$

$$U'(z) = 4az+4=0 \Rightarrow z=\frac{-1}{a}=-\frac{1}{a}$$

$$U''(z) = 4a, \quad U''\left(-\tfrac{1}{a}\right) = 4a<0 \ (da\ a<0)$$

$$f\left(-\tfrac{1}{a}\right) = \frac{4a+1}{a} \Rightarrow P\left(-\tfrac{1}{a}\,/\,\tfrac{4a+1}{a}\right)$$

Graph mit a = –1



Aufgabe 3 — 11 Punkte

a) $f(x) = \underbrace{(x-3)}_{u(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{v(x)}$

Mit der Produktregel folgt für die erste Ableitungsfunktion von *f*:

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x) \\ &= 1\cdot e^x + (x-3)\cdot e^x \\ &= 1\cdot e^x + x\cdot e^x - 3\cdot e^x \\ &= x\cdot e^x - 2\cdot e^x \\ &= (x-2)\cdot e^x \end{aligned}$$

b) $f(x) = (x-3)\cdot e^x = 0$ ⇨ $x = 3$ ⇨ $A(3\,|\,0)$

$f(0) = (0-3)\cdot e^0 = -3\cdot 1 = -3$ ⇨ $B(0\,|\,-3)$

Funktionsgleichung von g: $\underline{\underline{g(x) = x-3}}$

c) Extrempunkte:

$f'(x) = (x-2)\cdot e^x = 0$ ⇨ mögliche Extremstelle bei $x = 2$

$f''(2) = (2-1)\cdot e^2 = e^2 > 0$ d.h. $x = 2$ ist eine Minimumstelle

$f(2) = (2-3)\cdot e^2 = -e^2$ ⇨ Tiefpunkt $\underline{\underline{T(2\,|\,-e^2)}}$

Wendepunkte:

$f''(x) = (x-1)\cdot e^x = 0$ ⇨ mögliche Wendestelle bei $x = 1$

$f'''(1) = 1\cdot e^1 = e \neq 0$ d.h. $x = 1$ ist eine Wendestelle

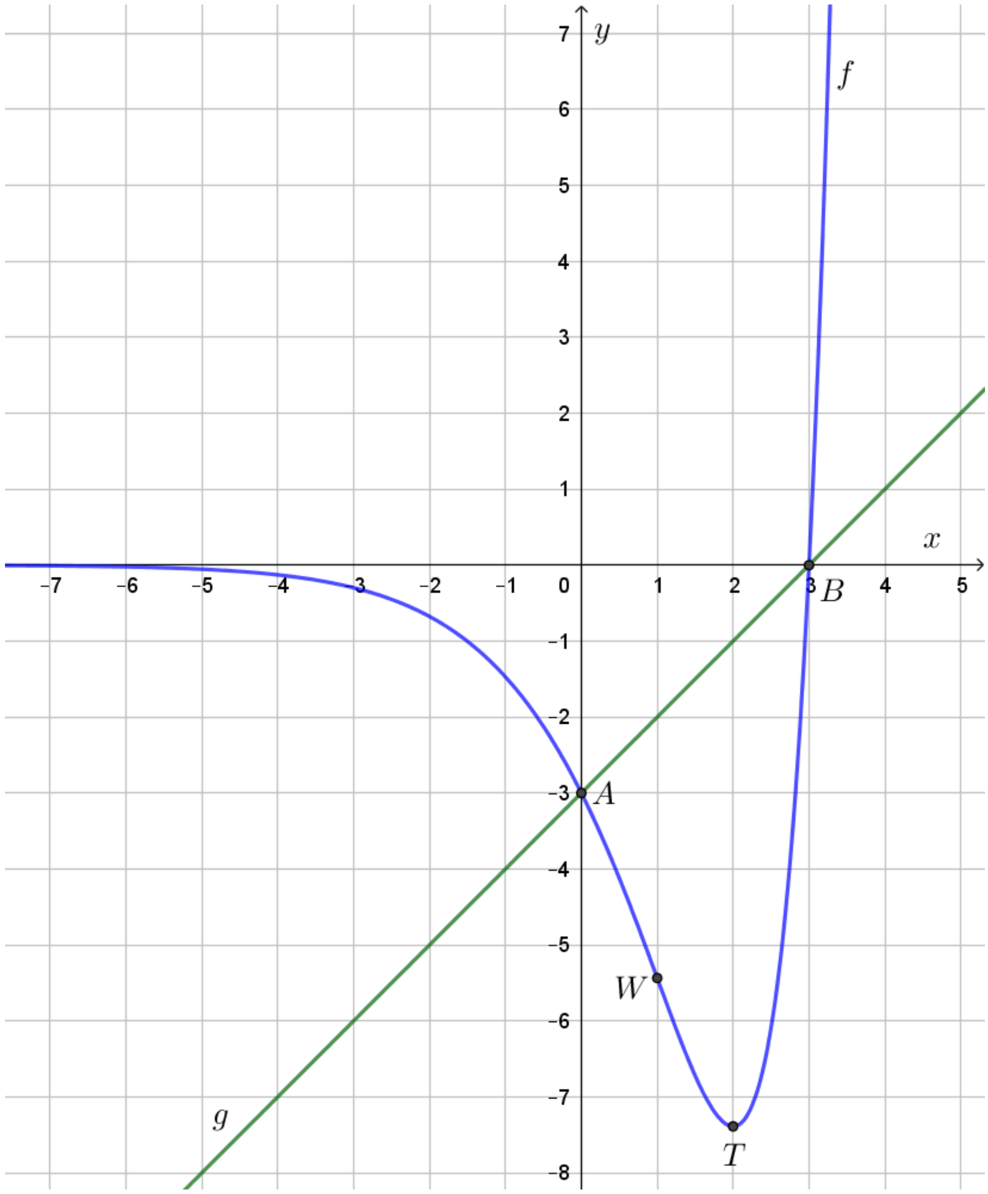
$f(1) = (1-3)\cdot e^2 = -2e^2$ ⇨ Wendepunkt $\underline{\underline{W(1\,|\,-2e)}}$

d) $-6 \le x \le 3.25$ (1 Einheit ≙ 2 Häuschen). *Graph siehe nächste Seite*.

e) $A = \int_0^3 g(x) - f(x)\,dx = \boxed{\int_0^3 (x-3)-(x-3)\cdot e^x dx} = \underline{\underline{11.59\,FE}}$

f) $V = \pi\cdot\int_0^3 (f(x))^2 - (g(x))^2\,dx = \boxed{\pi\cdot\int_0^3 ((x-3)\cdot e^x)^2 - (x-3)^2\,dx} = \underline{\underline{268.94\,VE}}$

Graph zur Aufgabe d)



Wertetabelle

x	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	3.25
y	–0.02	–0.05	–0.13	–0.30	–0.68	–1.47	–3	–5.44	–7.39	0	6.48

Aufgabe 4 13.5 Punkte

a) Die Koordinaten von $Q(-1|6|3)$ in die Koordinatengleichung von E einsetzen:

$$3\cdot(-1)+2\cdot 6+9\cdot 3=36 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{Q\in E}}$$

b) Im Falle von $\sphericalangle PRQ=90°$ müsste für das Skalarprodukt gelten: $\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}=0$.

$$\overrightarrow{RP}=\begin{pmatrix}6\\0\\-2\end{pmatrix},\ \overrightarrow{RQ}=\begin{pmatrix}-1\\6\\-1\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}=\begin{pmatrix}6\\0\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\6\\-1\end{pmatrix}=-6+0+2=-4\neq 0 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{\sphericalangle PRQ\neq 90°}}$$

c) $g=PR:\ \vec{r}=\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-6\\0\\2\end{pmatrix}$ Lotfusspunkt F von Q auf g: $F(-6t\,|\,0\,|\,4+2t)\in g$

Der Vektor $\overrightarrow{FQ}$ muss mit dem Richtungsvektor von g einen rechten Winkel einschliessen d.h. das entsprechende Skalarprodukt muss Null sein:

$$\overrightarrow{FQ}=\begin{pmatrix}-1+6t\\6\\-1-2t\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{FQ}\cdot\begin{pmatrix}-6\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+6t\\6\\-1-2t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-6\\0\\2\end{pmatrix}=6-36t+0-2-4t=4-40t$$

$$4-40t=0$$
$$4=40t$$
$$t=\tfrac{1}{10}=0.1$$

$$\Rightarrow\; \underline{\underline{\left|\overrightarrow{FQ}\right|}}=\left|\begin{pmatrix}-0.4\\6\\-1.2\end{pmatrix}\right|=\sqrt{37.6}\approx\underline{\underline{6.13\,m}}$$

d) Der in c) berechnete Abstand $\left|\overrightarrow{FQ}\right|$ ist die Höhe der Dreiecks zur Seite $\left|\overrightarrow{PR}\right|$.

$$\left|\overrightarrow{PR}\right|=\left|\begin{pmatrix}-6\\0\\2\end{pmatrix}\right|=\sqrt{40}\,m\approx 6.32\,m$$

$$A=\tfrac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{PR}\right|\cdot\left|\overrightarrow{FQ}\right|=\tfrac{1}{2}\cdot 6.32\,m\cdot 6.13\,m=19.39\,m^2$$

$$\Rightarrow\; \underline{\underline{m}}=19.39\,m^2\cdot 150\,\tfrac{g}{m^2}=2908.5\,g=\underline{\underline{2.91\,kg}}$$

e) Normalenvektor der Ebene E: $\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$

Normalenvektor der xy-Ebene: $\overrightarrow{n_{xy}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{n_E} \cdot \overrightarrow{n_{xy}} = \left|\overrightarrow{n_E}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_{xy}}\right| \cdot \cos\alpha$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \sqrt{94} \cdot 1 \cdot \cos\alpha$$

$$9 = \sqrt{94} \cdot 1 \cdot \cos\alpha$$

$$\alpha = \arccos\left(\tfrac{9}{\sqrt{94}}\right)$$

$$\alpha \approx 21.83°$$

⇨ Das Sonnensegel ist ausreichend geneigt.

f) Koordinaten des Schattenpunkts P' berechnen.

$h = PP' \,||\, QC$: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ Schattenpunkt P': $P'\left(6+t \mid -2t \mid 2-3t\right) \in h$

Eingesetzt in der xy-Ebene d.h. in $z = 0$:

$$z = 0$$
$$2 - 3t = 0$$
$$t = \tfrac{2}{3}$$

⇨ $\underline{\underline{P'\left(\tfrac{20}{3} \mid \tfrac{-4}{3} \mid 0\right) = P'\left(6.\overline{6} \mid -1.\overline{3} \mid 0\right)}}$

Aufgabe 5 — 13.5 Punkte

a1) Möglichkeiten

Spielertyp:	Abwehr	Mittelfeld	Angriff	Torwart
verfügbar:	7	5	6	3
ausgewählt:	4	4	2	1

$$\binom{7}{4}\cdot\binom{5}{4}\cdot\binom{6}{2}\cdot\binom{3}{1} = 35\cdot 5\cdot 15\cdot 3 = \underline{\underline{7'875}}$$

a2) Bilden von Blöcken

4 Abwehrspieler nebeneinander: 4! = 24
4 Mittelfeldspieler nebeneinander: 4! = 24
2 Angriffsspieler nebeneinander: 2! = 2
Vertauschen der 3 Spielertyp-Blöcke: 3! = 6
Torwart am Rand: 2

$$(4!\cdot 4!\cdot 2!)\cdot 3!\cdot 2 = \underline{\underline{13'824}}$$

b1) Binomialverteilung für n Versuche mit Trefferwahrscheinlichkeit p = 0.75

Betrachtung des Gegenereignisses: P (mindestens ein Treffer) = 1 − P (kein Treffer)

$$P_n(X\geq 1) = 1-P_n(X=0) = 1-\binom{n}{0}\cdot 0.75^0\cdot 0.25^n = 1-0.25^n$$

$$\Rightarrow \quad 1-0.25^n > 0.999$$

$$\Rightarrow \quad 0.25^n < 0.001$$

$$\Rightarrow \quad n\cdot\ln(0.25) < \ln(0.001)$$

$$\Rightarrow \quad n < \frac{\ln(0.001)}{\ln(0.25)} < 4.98$$

$$\Rightarrow \quad n \geq 5$$

Der FC Top muss **mindestens 5 Elfmeter** schiessen, um wenigstens einen zu verwandeln.

b2) 4 alternative Fälle eines Unentschiedens (T_x = Treffer der Mannschaft X):

$0 \times T_{Top} \mid 0 \times T_{Fit}$ $\quad 0.75^0\cdot 0.25^3\cdot 0.70^0\cdot 0.30^3 = 0.000422$

$1 \times T_{Top} \mid 1 \times T_{Fit}$ $\quad \binom{3}{1}\cdot 0.75\cdot 0.25^2\cdot\binom{3}{1}\cdot 0.70\cdot 0.30^2 = 0.026578$

$2 \times T_{Top} \mid 2 \times T_{Fit}$ $\binom{3}{2} \cdot 0.75^2 \cdot 0.25 \cdot \binom{3}{2} \cdot 0.70^2 \cdot 0.30 = 0.186047$

$3 \times T_{Top} \mid 3 \times T_{Fit}$ $0.75^3 \cdot 0.25^0 \cdot 0.70^3 \cdot 0.30^0 = 0.144703$

$\Rightarrow$ P = 0.000422 + 0.026578 + 0.186047 + 0.144703 ≈ 0.35775

Die Wahrscheinlichkeit für ein Unentschieden beträgt **35.8 %**.

b3) Für ein Spielerpaar gilt:

P (unentschieden) = P (A und B treffen je 0-mal) + P (A und B treffen je 1-mal)

= 0.25 · 0.3 + 0.75 · 0.7 = 0.6

$\Rightarrow$ P («unentschieden nach drei Paaren») = 0.6^3 = 0.216

Mit einer Wahrscheinlichkeit von **21.6 %** steht nach drei paarweise geschossenen Elfmetern noch kein Sieger fest.

c) P («Treffer») = 0.05 und P («kein Treffer») = 0.95

n = Anzahl Treffer Zufallsvariable X = Ausgaben der Clubleitung

n = 0 $\binom{3}{0} \cdot 0.05^0 \cdot 0.95^3 = 0.857375$

n = 1 $\binom{3}{1} \cdot 0.05^1 \cdot 0.95^2 = 3 \cdot 0.8045125 = 0.135375$

n = 2 $\binom{3}{2} \cdot 0.05^2 \cdot 0.95^1 = 3 \cdot 0.002375 = 0.007125$

n = 3 $\binom{3}{3} \cdot 0.05^3 \cdot 0.95^0 = 0.000125$

Erwartungswert E(X) =

–1000 · 0.857375 + 10000 · 0.135375 + 20000 · 0.007125 + 30000 · 0.000125 = 642.63

Die Clubleitung muss mit **Fr. 642.63** pro Spiel rechnen.