Schriftliche Maturitätsprüfung 2019

Fach	Grundlagenfach Mathematik
Prüfende Lehrpersonen	Edoardo Sassone edoardo.sassone@edulu.ch Essodinam Alitiloh essodinam.alitiloh@edulu.ch Claudia Sänger claudia.saenger@edulu.ch
Klassen	6a, 6c, 6g
Prüfungsdatum	24. Mai 2019
Prüfungsdauer	3 Stunden
Erlaubte Hilfsmittel	- Formelsammlung «Formeln, Tabellen, Begriffe» - Taschenrechner TI-30X Pro
Anweisungen zur Lösung der Prüfung	- Es wird Wert auf eine saubere Darstellung gelegt. - Jede Aufgabe soll einen vollständigen und nachvollziehbaren Lösungsweg enthalten. - Jede Aufgabe soll auf einem neuen Bogen begonnen werden. Jeder Bogen ist mit dem Namen zu beschriften.
Anzahl erreichbarer Punkte	Aufgabe 1: 12 Aufgabe 2: 8 Aufgabe 3: 12 Aufgabe 4: 11 Total: 43 Für die Note 6 werden mindestens 39 Punkte benötigt.
Anzahl Seiten (inkl. Titelblatt)	4

Aufgabe 1 – Analysis	a	b	c	d	**Punkte**
	2	7	2	1	**12**

Gegeben ist die Funktion $f(x)=\dfrac{4(3x-4)}{(x-1)^3}$

a) Bestimmen Sie die ersten beiden Ableitungen.

Falls Sie die Ableitungen nicht berechnen können, rechnen Sie mit $f'(x)=\dfrac{2(3-2x)}{(x-1)^4}$ und $f''(x)=\dfrac{12x-32}{(x-1)^5}$ weiter.

b) Untersuchen Sie die Funktion f, zeichnen Sie den Graphen und geben Sie an

- Definitionsbereich
- Nullstellen
- Gleichungen der Asymptoten
- Hoch-, Tief- und Wendepunkte

c) Verschieben Sie die Funktion $f(x)$ um eine Einheit nach links, so erhalten Sie die Funktion $g(x)$. Der Graph der Funktion g und die x-Achse schliessen im 1. Quadranten eine nach rechts offene Fläche ein.

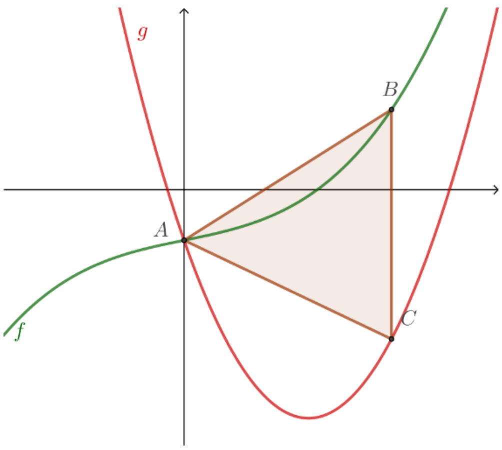
- Zeichnen Sie den Graphen von g und schraffieren Sie die beschriebene Fläche.
- Berechnen Sie den beschriebenen Flächeninhalt.

d) Berechnen Sie den Schnittwinkel der Tangente an den Graphen von f bei x = 2 mit der x-Achse

Aufgabe 2 – Analysis	a	b	**Punkte**
	3	5	**8**

Betrachten Sie die Funktionen

$$f(x)=\frac{3}{4}x^3+x-2$$
$$g(x)=7x^2-14x-2$$



a) Bestimmen Sie den Flächeninhalt, den die Graphen der Funktionen f und g einschliessen

Betrachten Sie die Punkte des Dreiecks ABC; bekannt ist, dass:

- $A(0|-2)$
- B auf dem Graphen von f so liegt, dass $0 \le x_B \le 3$;
- C auf dem Graphen von g so liegt, dass $x_C = x_B$,

wie im nebenstehenden Graph skizziert.

b) Bestimmen Sie den maximalen Flächeninhalt von ABC und die Koordinaten der Punkte B und C.

Falls Sie den Flächeninhalt nicht bestimmen können, dann verwenden Sie

$$F_{ABC}=\frac{1}{2}x^4-\frac{14}{3}x^3+10x^2+1$$

	a	b	c	d	e	Punkte
Aufgabe 3 – Vektorgeometrie	1	1	3	6	1	**12**

Auf einem Messgelände soll eine gerade Pyramide mit quadratischer Grundfläche aufgestellt werden. Die Grundfläche ist durch die Punkte $A(-12|-9|0)$, $B(9|-12|0)$, $C(12|9|0)$ und D gegeben.

Die Spitze liegt bei $S(0|0|9)$. Eine Einheit entspricht einem Meter.

a) Geben Sie die Koordinaten des Punktes D an.

b) Bestimmen Sie das Volumen der Pyramide.

c) Zu einem bestimmten Zeitpunkt verlaufen die Sonnenstrahlen parallel zum Vektor $\vec{V} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

i) Berechnen Sie den Winkel, unter dem die Sonnenstrahlen auf das Messgelände treffen.

ii) Bestimmen Sie die Koordinaten des Schattenpunktes S', den die Sonnenstrahlen von der Spitze S auf dem Boden bilden.

d) Im Innern der Pyramide soll ein gerader Balken als Stütze abgebracht werden. Der Balken wird in der Mitte der Strecke $\overline{AD}$ angebracht und steht senkrecht auf dem Dreieck BCS .

i) Bestimmen Sie die Koordinatengleichung der Ebene, die durch B , C und S gegeben ist.

Falls i) nicht gelöst werden kann, dann verwenden Sie im Weiteren folgende Ebenengleichung: $42x-6y+50z-10=0$

ii) Bestimmen Sie die Länge des Stützbalkens

e) Bestimmen Sie den Winkel zwischen der Ebene durch B , C und S und dem Messegelände.

	a	b	c	Punkte
Aufgabe 4 – Wahrscheinlichkeit	4	3	4	**11**

Paul und Lena vertreiben sich einen verregneten Nachmittag mit ein paar Würfeln.

a) Lena würfelt mehrmals mit einem Würfel und notiert sich ihr Würfelergebnis.

i) Wie viele verschiedene mögliche Ergebnisse gibt es, wenn Lena den Würfel 7-mal wirft und sich nach jedem Wurf die Zahl auf ihr Blatt notiert?

ii) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Lena bei 10 Würfen genau 5-mal eine «6» würfelt.

iii) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Lena bei 10 Würfen mindestens 3-mal eine «6» würfelt.

iv) Wie oft muss Lena mindestens werfen, damit sie mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% wenigstens einmal eine «6» würfelt?

b) Lena will jetzt mehrere Würfel verwenden. Sie findet 2 verschieden gefüllte Würfelbecher. Im ersten Becher befinden sich 3 grüne, 2 blaue und ein gelber Würfel. Im zweiten Becher befinden sich ein schwarzer, ein weisser, ein roter, ein grüner, ein blauer und ein gelber Würfel. Lena achtet jetzt nicht auf die Zahlen, sondern nur auf die Farbe der Würfel, die sie zieht. Lena zieht nacheinander aus einem der beiden Becher mehrere Würfel heraus, die sie nebeneinander auf den Tisch legt.

i) Wie viele mögliche Anordnungen gibt es, falls sie die alle Würfel aus dem ersten Becher zieht und wie viele Anordnungen, falls sie die alle Würfel aus dem zweiten Becher zieht?

ii) Wie viele mögliche Anordnungen gibt es, falls sie die 3 Würfel aus dem ersten Becher zieht und wie viele Anordnungen, falls sie die 3 Würfel aus dem zweiten Becher zieht?

iii) Lena wirft nun eine faire Münze, um jeweils zu entscheiden, ob sie aus dem ersten oder aus dem zweiten Becher jeweils 3 Würfel zieht. Wie viele mögliche Anordnungen gibt es?

c) Paul schlägt ein Spiel mit drei Würfeln vor. Dabei werden zunächst alle drei Würfel gleichzeitig geworfen. Jeder Würfel, der bei diesem ersten Wurf eine «6» zeigt, wird liegen gelassen. Die anderen Würfel werden ein zweites Mal geworfen. Danach wird gezählt, wie viele der Würfel eine «6» zeigen. Die Zufallsgrösse X sei die Anzahl der bei diesem Spiel geworfenen Sechsen.

i) Zeichnen Sie ein übersichtliches Baumdiagramm zu diesem Spiel. (Das Eintragen von Wahrscheinlichkeiten ist nicht erforderlich.)

ii) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, am Ende des Spiels keine «6» zu haben.

iii) Lena zahlt an Paul 2 Franken Einsatz. Falls mindestens einer der Würfel am Schluss eine «6» zeigt, so zahlt Paul an Lena den Betrag *a* Franken aus. Anderenfalls behält Paul den Einsatz. Wie gross muss a sein, damit Paul im Mittel 0,50 Franken pro Spiel gewinnt.

Lösungen

Aufgabe 1: Analysis (12P)

Gegeben ist die Funktion $f(x)=\dfrac{4\left(3x-4\right)}{(x-1)^3}$

a) Bestimmen Sie die ersten beiden Ableitungen

$$f'(x)=\frac{12(x-1)^3-3(x-1)^2(12x-16)}{(x-1)^6}=\frac{12(x-1)^3-12(3x-4)(x-1)^2}{(x-1)^6}=\frac{12(x-1)^2(3-2x)}{(x-1)^6}$$

$$\underline{\underline{f'(x)=-\frac{12(2x-3)}{(x-1)^4}}}$$

$$f''(x)=\frac{-24(x-1)^4+48(2x-3)(x-1)^3}{(x-1)^8}=\frac{(x-1)^3(-24(x-1)+48(2x-3))}{(x-1)^8}$$

$$\underline{\underline{f''(x)=\frac{24(3x-5)}{(x-1)^5}}}$$

ALTERNATIV!

$$f(x)=\frac{4(3x-4)}{(x-1)^3}=4(3x-4)\cdot(x-1)^{-3}$$

$$f'(x)=4\cdot 3\cdot(x-1)^{-3}+4(3x-4)\cdot(-3)\cdot(x-1)^{-4}$$

$$=\frac{12}{(x-1)^3}-\frac{12(3x-4)}{(x-1)^4}=\frac{12(x-1-3x+4)}{(x-1)^4}=\frac{12(-2x+3)}{(x-1)^4}$$

$$=12(-2x+3)\cdot(x-1)^{-4}$$

$$f''(x)=12\cdot(-2)\cdot(x-1)^{-4}+12(-2x+3)\cdot(-4)\cdot(x-1)^{-5}$$

$$=\frac{-24}{(x-1)^4}+\frac{-48(-2x+3)}{(x-1)^5}=\frac{-24x+24+96x-144}{(x-1)^5}=\frac{72x-120}{(x-1)^5}$$

b) Untersuchen Sie die Funktion f, zeichnen Sie den Graphen und geben Sie an

- Definitionsbereich $D = \mathbb{R}/\{1\}$

- Nullstelle $4(3x-4)=0 \Rightarrow x=\frac{4}{3}$

- Gleichungen der Asymptoten

Senkrechte Asymptote $x=1$ (Definitionslücke)

Waagrechte Asymptote $y=0$ da $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$

- Hoch-, Tief- und Wendepunkte

Extrema: $f'(x)=0 \Rightarrow -12(2x-3)=0 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$

$f'(1.1)=96000>0$ und $f'(2)=-12<0 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$ ist eine Maximumstelle

oder

$$f''(\frac{3}{2}) = 24\cdot\frac{(3\cdot\frac{3}{2}-5)}{\left(\frac{3}{2}-1\right)^5} = 24\cdot\frac{-\frac{1}{2}}{(\frac{1}{2})^5} = -24\cdot\frac{32}{2} = -384<0 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$$

ist eine Maximumstelle

$f(3/2)=16 \Rightarrow \underline{\underline{H(\frac{3}{2}/16)}}$ Hochpunkt

Wendepunkt: $f''(x)=0 \Rightarrow (3x-5)=0 \Rightarrow x=\frac{5}{3}$

$$f'''(x)=\frac{72(x-1)^5-5(x-1)^4(72x-120)}{(x-1)^{10}}=\frac{-288x+528}{(x-1)^6}=\frac{-24(22-12x)}{(x-1)^6}$$

$$f'''(\frac{5}{3})=\frac{528-288\cdot\frac{5}{3}}{\left(\frac{5}{3}-1\right)^6}=\frac{2187}{4}\neq 0 \quad \Rightarrow x=\frac{5}{3}$$ ist eine Wendestelle

Oder die f'' in zwei Stellen bestimmen (z.B. $f''(1.5)=-384<0$ und $f''(2)=24>0$

$f(5/3)=\frac{27}{2} \Rightarrow \underline{\underline{W(\frac{5}{3}/\frac{27}{2})}}$ Wendepunkt

Variante mit der Hilfe: $f'(x)=\frac{2(3-2x)}{(x-1)^4}$ und $f''(x)=\frac{12x-32}{(x-1)^5}$

Extrema: $f'(x)=0 \Rightarrow 2(3-2x)=0 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$

$f'(1.1)=16000>0$ und $f'(2)=-2<0 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$ ist eine Maximumstelle

ALTERNATIV

$$f''\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{12\cdot\frac{3}{2}-32}{\left(\frac{3}{2}-1\right)^5}-448<0 \rightarrow \quad x=\frac{3}{2}$$ ist eine Maximumstelle

$f(3/2)=16 \Rightarrow \underline{\underline{H(\frac{3}{2}/16)}}$ Hochpunkt

Wendepunkt: $f''(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 12x - 32 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{8}{3}$

$f''(2) = -8 < 0$

$f''(3) = \frac{1}{8} > 0$

Dann ist $x = \frac{8}{3}$ eine Wendestelle.

ALTERNATIV:

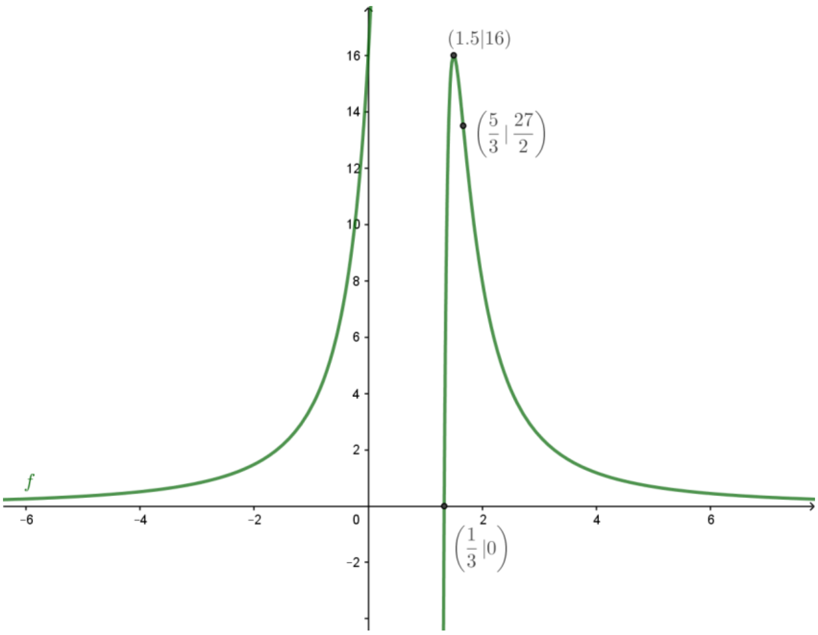
$f'''(x) = \left[\frac{12x-32}{(x-1)^5}\right]' = \frac{-48x+148}{(x-1)^6}$

$f'''\left(\frac{8}{3}\right) \approx 0.93 \neq 0$

Dann ist $x = \frac{8}{3}$ eine Wendestelle.

$f(8/3) = \frac{864}{125} \Rightarrow \underline{\underline{W(\frac{8}{3} / \frac{864}{125})}}$ Wendepunkt

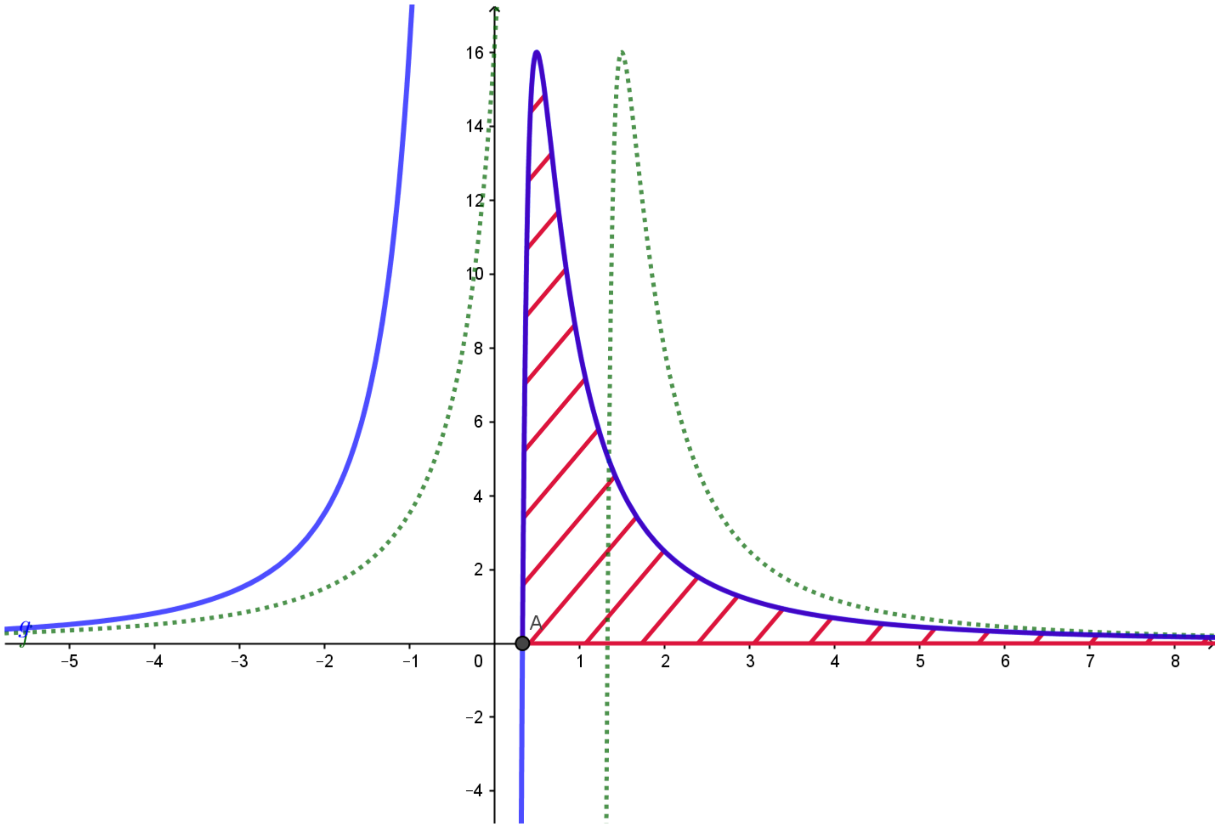
Graphen mit wichtigen Punkte wie (Nullstellen, Extrema, Wendepunkte, …)



c) Verschieben Sie die Funktion $f(x)$ um eine Einheit nach links, so erhalten Sie die Funktion $g(x)$.Der Graph der Funktion g und sie x-Achse schliessen im 1. Quadranten eine nach rechts offene Fläche ein.

- Zeichnen Sie den Graph von g und schraffieren Sie die beschriebene Fläche.

$$g(x) = f(x+1) = \frac{4(3(x+1)-4)}{\left((x+1)-1\right)^3} = \frac{4(3x-1)}{x^3} = \frac{12}{x^2} - \frac{4}{x^3} = 12 \cdot x^{-2} - 4 \cdot x^{-3}$$



- Berechnen Sie den beschriebenen Flächeninhalt.

Die Nullstelle der ursprünglichen f lag bei $\frac{4}{3}$, so ist die von g an der Stelle $x = \frac{1}{3}$ (erkennbar auch beim Lösen von $g(x) = 0$).

$$A = \lim_{b\to\infty} \int_{\frac{1}{3}}^{\infty} g(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_{\frac{1}{3}}^{\infty} (12 \cdot x^{-2} - 4 \cdot x^{-3})\,dx = \lim_{b\to\infty} \left[G(x)\right]_{\frac{1}{3}}^{b}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[-12x^{-1} + 2x^{-2}\right]_{\frac{1}{3}}^{b} = \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{12}{x} + \frac{2}{x^2}\right]_{\frac{1}{3}}^{b} = \lim_{b\to\infty} G(b) - G\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{12}{\underbrace{b}_{\to 0}} + \frac{2}{\underbrace{b^2}_{\to 0}}\right) - \left(-\frac{12}{\frac{1}{3}} + \frac{2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2}\right) = 0 - (-18) = 18$$

d) Berechnen Sie den Schnittwinkel von den Tangenten an die Kurve bei x = 2 und die x-Achse.

$$\tan\alpha = f'(2) = \frac{-48+36}{(2-1)^4} = \frac{-12}{1} = -12$$

$$x_t = 2 \Rightarrow y_t = -12x + 32$$

$\alpha = \tan^{-1}(-12) = \underline{\underline{-85.24°}}$ oder $\alpha = \underline{\underline{94.76°}}$

2. Aufgabe: Analysis (8 P)

a)

$f(x) = g(x)$

$\frac{3}{4}x^3 + x - 2 = 7x^2 - 14x - 2 \qquad | -7x^2 + 14x + 2$

$\frac{3}{4}x^3 - 7x^2 + 15x = 0$

$\underbrace{x}_{=0}\left(\underbrace{\frac{3}{4}x^2 - 7x + 15}_{=0}\right) = 0$

$x_1 = 0$

$a = \frac{3}{4} \qquad b = -7 \qquad c = 15$

$x_2 = \frac{-(-7)-\sqrt{(-7)^2-4\cdot\frac{3}{4}\cdot 15}}{2\cdot\frac{3}{4}} = \frac{7-\sqrt{49-45}}{\frac{3}{2}} = (7-2)\cdot\frac{2}{3} = \frac{10}{3}$

$x_3 = (7+2)\cdot\frac{2}{3} = 6$

Die Kurven schneiden sich in drei Stellen.

$f(2) = 6 \qquad g(2) = -2$

$f(4) = 50 \qquad g(4) = 54$

So ist $f(x) \geq g(x)$ im Intervall $\left[0; \frac{10}{3}\right]$

$f(x) \leq g(x)$ im Intervall $\left[\frac{10}{3}; 6\right]$

Dann ist der eingeschlossene Flächeninhalt

$$O = \int_0^{\frac{10}{3}} \big(f(x) - g(x)\big)\, dx + \int_{\frac{10}{3}}^{6} \big(g(x) - f(x)\big)\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{10}{3}} \left((7x^2 - 14x - 2) - \left(\frac{3}{4}x^3 + x - 2\right)\right) dx$$

$$+ \int_{\frac{10}{3}}^{6} \left(\left(\frac{3}{4}x^3 + x - 2\right) - (7x^2 - 14x - 2)\right) dx$$

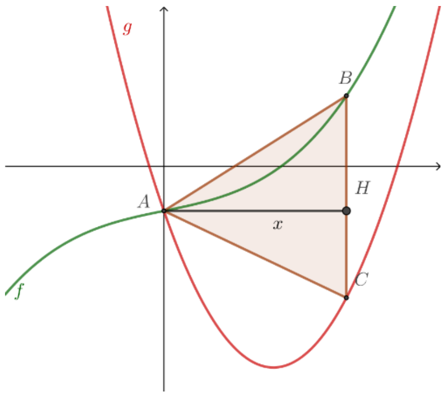
$$= \int_0^{\frac{10}{3}} \left(\frac{3}{4}x^3 - 7x^2 + 15x\right) dx + \int_{\frac{10}{3}}^{6} \left(-\frac{3}{4}x^3 + 7x^2 - 15x\right) dx$$

$$= \left[\frac{3}{16}x^4 - \frac{7}{3}x^3 + \frac{15}{2}x^2\right]_0^{\frac{10}{3}} + \left[-\frac{3}{16}x^4 + \frac{7}{3}x^3 - \frac{15}{2}x^2\right]_{\frac{10}{3}}^{6}$$

$$= \frac{1625}{81} + \frac{896}{81} = \frac{2521}{81} \approx 31.12$$

b)

$$F_{ABC} = \frac{|\overline{AH}| \cdot |\overline{BC}|}{2} = \frac{x \cdot \big(f(x) - g(x)\big)}{2}$$
$$= \frac{x \cdot \left(\frac{3}{4}x^3 - 7x^2 + 15x\right)}{2}$$
$$= \frac{3}{8}x^4 - \frac{7}{2}x^3 + \frac{15}{2}x^2$$



Man will diesen Inhalt maximieren:
Nennen wir

$$h(x) = \frac{3}{8}x^4 - \frac{7}{2}x^3 + \frac{15}{2}x^2$$
$$h'(x) = \frac{3}{2}x^3 - \frac{21}{2}x^2 + 15x = x\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{21}{2}x + 15\right)$$
$$h''(x) = \frac{9}{2}x^2 - 21x + 15$$
$$h'(x) = 0$$
$$\underbrace{x}_{=0}\left(\underbrace{\frac{3}{2}x^2 - \frac{21}{2}x + 15}_{=0}\right) = 0$$

$x_4 = 0$ Hier $A \equiv B \equiv C \rightarrow F_{ABC} = 0$, minimal!

$x_5 = \frac{-\left(-\frac{21}{2}\right) - \sqrt{\left(-\frac{21}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{3}{2} \cdot 15}}{2 \cdot \frac{3}{2}} = \frac{\frac{21}{2} - \sqrt{\frac{441}{4} - 90}}{3} = \frac{\frac{21}{2} - \sqrt{\frac{81}{4}}}{3} = \frac{\frac{21}{2} - \frac{9}{2}}{3} = 2$ ok

$h''(x_5) = h''(2) = -9$ Dort ist die Funktion rechtsgekrümmt $\rightarrow$
x_5 ist eine maximale Stelle.

$x_6 = \frac{\frac{21}{2} + \frac{9}{2}}{3} = 5$ aus dem Bereich

Wenn $x_B = 2$ ist dann der Flächeninhalt $F_{ABC} = h(2) = 8$

$B = \big(2 \big| f(2)\big) = (2|6)$
$C = \big(2 \big| g(2)\big) = (2|-2)$

MIT DER ALTERNATIVEN FUNKTION:

$$k(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{14}{3}x^3 + 10x^2 + 1$$

$$k(x) = \frac{4}{3} \cdot h(x) + 1$$

So bekommen wir die gleichen Extremstellen $x_4 = 0 \;\; x_5 = 2 \;\; x_6 = 5$

Wenn $x = 2$ ist dann der Flächeninhalt $F_{ABC} = k(2) = \frac{4}{3} \cdot 8 + 1 = \frac{35}{3}$

$B = \left(2 \middle| f(2)\right) = (2|6)$

$C = \left(2 \middle| g(2)\right) = (2|-2)$

3. Aufgabe: Vektorgeometrie (12P)

Auf einem Messgelände soll eine gerade Pyramide mit quadratischer Grundfläche aufgestellt werden. Die Grundfläche ist durch die Punkte $A(-12\,|-9\,|\,0)$, $B(9\,|-12\,|\,0)$, $C(12\,|\,9\,|\,0)$ und D gegeben. Die Spitze liegt bei $S(0\,|\,0\,|\,9)$. Eine Einheit entspricht einem Meter.

a) Geben Sie die Koordinaten des Punktes D an.

$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow \begin{pmatrix} 12 - x \\ 9 - y \\ 0 - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 + 12 \\ -12 + 9 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} \Rightarrow D(-9|12|0)$$

b) Bestimmen Sie das Volumen der Pyramide

Volumen

$$V = \frac{G \cdot h}{3} = \frac{450 \cdot 9}{3} = \underline{\underline{1350}} \text{ m}^3$$

c) Zu einem bestimmten Zeitpunkt verlaufen die Sonnenstrahlen parallel zum Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

i)Berechnen Sie den Winkel, unter dem die Sonnenstrahlen auf das Messegelände treffen.

$$\vec{v}_{Horizontale} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}}{\sqrt{1+4+0} \cdot \sqrt{1+4+4}} = \frac{5}{3\sqrt{5}} \cong 0.745$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\alpha \cong 41.81^\circ}}$$

ii)Bestimmen Sie die Koordinaten des Schattenpunktes S’, den die Sonnenstrahlen von der Spitze S auf dem Boden bilden.

$$s' = g_L \cap E_B$$

E_B: Gleichung der Boden: xy- Ebene: $z = 0$

g_L: Gleichung des Lichtes: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$z = 0 \Rightarrow 9 - 2t = 0 \Rightarrow t = \frac{9}{2}$$

$$\underline{\underline{S'(\frac{9}{2} | 9 | 0)}}$$

d) Im Innern der Pyramide soll ein gerader Balken als Stütze abgebracht werden. Der Balken wird in der Mitte der Strecke $\overline{AD}$ angebracht und steht senkrecht auf dem Dreieck BCS.

i) Bestimmen Sie die Koordinatengleichung der Ebene, die durch B, C und S gegeben ist.

$$Ebene_{BCS}: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{OB} + u \cdot \overrightarrow{BS} + v \cdot \overrightarrow{BC}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 12 \\ 9 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 21 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 9 - 9u + 3v \\ y = -12 + 12u + 21v \\ z = 9u \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 9 - 9u + 3v \\ y = -12 + 12u + 21v \end{cases}$$

$$\left| \begin{array}{l} -7x = -63 + 63u - 21v \\ y = -12 + 12u + 21v \end{array} \right.$$

$$(1) \quad -7x + y = -75 + 75u \quad und \quad (2) \quad u = \frac{z}{9}$$

(2) in (1) ergibt die folgende Koordinatengleichung:

$$Ebene_{BCS}: \underline{\underline{21x - 3y + 25z - 225 = 0}}$$

ii) Bestimmen Sie die Länge des Stützbalkens

Mitte $\overline{AD}$: $M_{AD} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -12-9 \\ -9+12 \\ 0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10.5 \\ 1.5 \\ 0 \end{pmatrix}$

Länge des Stützbalkens = Abstand Punkt M_{AD} von der $Ebene_{BCS}$

- Gleichung für Lotgerade $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10.5 \\ 1.5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 21 \\ -3 \\ 25 \end{pmatrix} \cap Ebene_{BCS}$

$21(-10.5+21t)-3(1.5-3t)+25(25t)-225=0$

$1075t-450=0$

$t=\frac{18}{43}$

- Lotfusspunkt $M(\frac{-147}{86} \mid \frac{21}{86} \mid \frac{900}{86})$

- $d(M,M_{AD}) = \sqrt{\left(-10.5+\frac{147}{86}\right)^2 + \left(1.5-\frac{21}{86}\right)^2 + \left(0-\frac{450}{43}\right)^2} \cong \underline{\underline{13.725}}$

e) Bestimmen Sie den Winkel zwischen der Ebene durch B, C und S und dem Messegelände

$Ebene_{BCS}: \underline{\underline{21x-3y+25z-225=0}}$

$Ebene_{Messegelande}$: ist die Ebene durch den Quadrat A, B, C und D ist die E_B: Gleichung der Boden: xy- Ebene: $z=0$

$$\cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 21 \\ -3 \\ 25 \end{pmatrix}}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{441+9+625}} = \frac{25}{\sqrt{1075}} \cong 0.76$$

$\Rightarrow \underline{\underline{\alpha \cong 40.32^{\circ}}}$

4. Aufgabe: Wahrscheinlichkeit

a) X ist die Anzahl der 6er
X ist binomialverteilt

i) $V_{mW}(6,7) = 6^7 = \underline{\underline{279936}}$

ii) $P(X=5) = \binom{10}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^5\left(\frac{5}{6}\right)^5 = 0{,}013 = \underline{\underline{1{,}3\%}}$

iii) $P(X \geq 3) = \sum_{i=3}^{10}\binom{10}{i}\left(\frac{1}{6}\right)^i\left(\frac{5}{6}\right)^{10-i} = 0{,}225 = \underline{\underline{22{,}5\%}}$

iv) $P(X \geq 1) \geq 0{,}9$

$P(X=0) \leq 0{,}1$

$\binom{n}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^n \leq 0{,}1$

$\left(\frac{5}{6}\right)^n \leq 0{,}1$

$n \geq \log_{\left(\frac{5}{6}\right)}(0{,}1)$

$n \geq 12{,}6$

Lena muss mindestens 13-mal werfen.

b) Würfelbecher:

i) Erster Becher: $P_{mW} = \frac{6!}{3!2!} = \underline{\underline{60}}$

Zweiter Becher: $P_{oW}(6) = 6! = \underline{\underline{720}}$

ii) Erster Becher: $\underline{\underline{19}}$

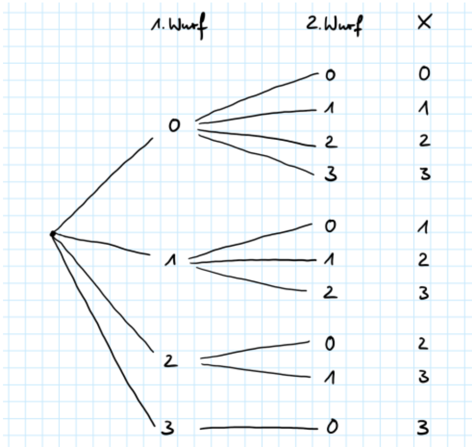
Zweiter Becher: $V_{oW}(6,3) = 6 \cdot 5 \cdot 4 = \underline{\underline{120}}$

iii) Summe der Anordnungen der beiden Becher abzüglich der Anordnungen, die bei beiden Bechern gleich sind:

$19 + 120 - 3! = \underline{\underline{133}}$

c) X ist die Anzahl der geworfenen 6er

i) Baumdiagramm:



ii) $P(X=0)=\binom{3}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^3\cdot\binom{3}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^3=\left(\frac{5}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3=0{,}335=\underline{\underline{33{,}5\%}}$

erster Wurf 0 zweiter Wurf 0

iii) Ereignis A: Die Würfel zeigen am Schluss mindestens eine 6
Y ist Lenas Gewinn

$$P(A)=1-P(X=0)=1-0{,}335=0{,}665=\underline{\underline{66{,}5\%}}$$

Falls A eintritt, beträgt der Reingewinn für Lena $(a-2)$ Fr. $\rightarrow$ $Y=a-2$
Falls $\overline{A}$ eintritt, beträgt der Verlust für Lena 2 Fr. $\rightarrow$ $Y=-2$

Im Mittel soll Lena pro Spiel 0,5 Fr verlieren $\rightarrow$ $E(Y)=-0{,}5$

$$E(Y)=\sum_{i=1}^{2} y_i\cdot P(Y=y_i)$$

$$(a-2)\cdot 0{,}665-2\cdot 0{,}335=-0{,}5$$
$$(a-2)\cdot 0{,}665=0{,}170$$
$$a-2=0{,}255$$
$$a=\underline{\underline{2{,}255}}$$

Paul muss eine Prämie von 2,25 Fr ausbezahlen.