Resultate

Lösung Aufgabe 1 (Vektorgeometrie)

a)

$\underline{A(-3/4/1)}$

d) Bestimmen Sie das Volumen V der Pyramide.

$h = 6$

$V = 36$

e)

<u>keinen Schnittpunkt</u>

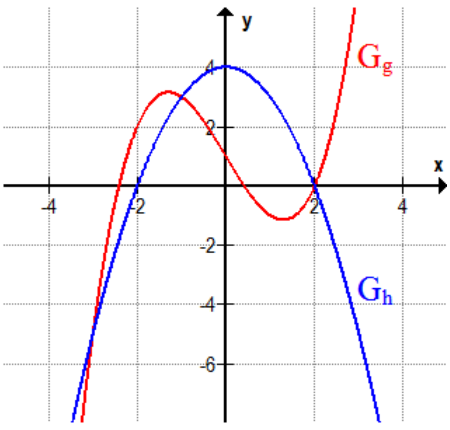
f) $F\colon \; -y + 2 = 0$

$\varphi = \arccos\left(\frac{1}{3}\right) \approx 70.53°$

Lösung Aufgabe 2 (Analysis)

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{5}{2}x + 3$

b)



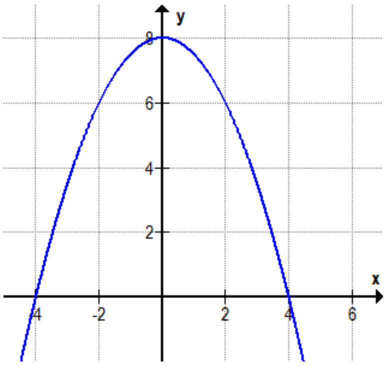
Die Schnittpunkte sind: $S_1(-3/-5)$; $S_2(-1/3)$; $S_3(2/0)$

c) $\varphi \approx 30°$

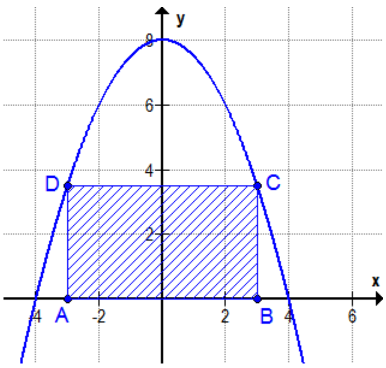
d) $A = \frac{8}{3} + \frac{63}{8} = \frac{253}{24} \cong 10.54$

Lösung Aufgabe 3 (Analysis)

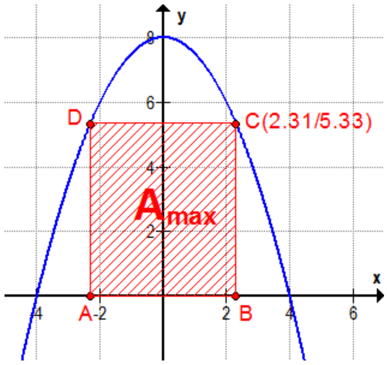
a)



b)



c) $H\left(\frac{4}{3}\sqrt{3} \approx 2.31 \middle| \frac{128}{9}\sqrt{3} \approx 24.63\right) \Rightarrow \underline{A_{max} = \frac{128}{9}\sqrt{3} \approx 24.63}$



d) $\Rightarrow$ Prozentualer Anteil $= \frac{A_{max}}{A(F)} = \frac{\frac{128}{9}\sqrt{3}}{\frac{128}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx \underline{57.73\%}$

e) Berechnen Sie dieses volumen V .

V_1 sei das von der rotierenden Fläche F erzeugte Volumen, V_2 das vom rotierenden Rechteck erzeugte Zylindervolumen.

$$V_1 = \frac{4096}{15}\pi \approx 857.86$$

Der durch das Rechteck R entstehende Zylinder hat den Radius $\underline{r = 6}$ und für die Höhe h gilt: $f\left(\frac{h}{2}\right) = 6 \quad \Leftrightarrow \quad |h| = 4$, also $\underline{h = 4}$

$V_2 = r^2\pi h = 36\pi \cdot 4 = \underline{144\pi \approx 452.39}$

$V = V_1 - V_2 = \frac{1936}{15}\pi \approx 405.475$

Lösung Aufgabe 4 (Wahrscheinlichkeit)

a) 0.476

b) 120

c) 48

d) 0.9844

e) 0.0563

f) 11

g) 16.07 Fr.

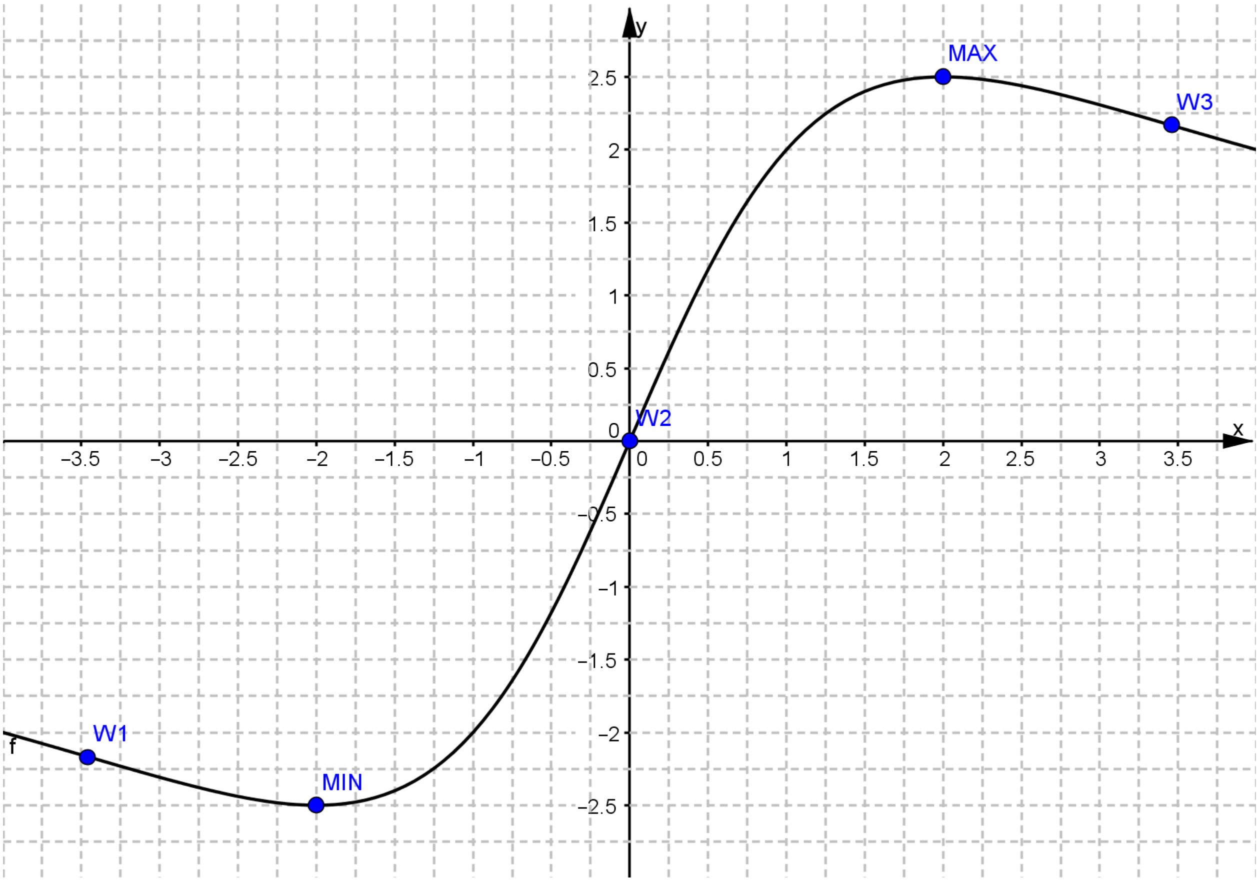
Resultate

Aufgabe 1 — 10.5 Punkte

a) Nullstellen: $x_N = 0$

Extrema: $Max(2/2.5)$, $Min(-2/-2.5)$

Wendepunkte: $W_1\left(-2\sqrt{3}/-\frac{5\sqrt{3}}{4}\right)$, $W_2(0/0)$, $W_3\left(2\sqrt{3}/\frac{5\sqrt{3}}{4}\right)$



b) $t(x) = \frac{6}{5}x + \frac{4}{5}$ $S\left(-\frac{8}{3}/-\frac{12}{5}\right)$ $\alpha = 64.34^o$

c) B(1 | 2) und C(4 | 2) $M\left(2/\frac{5}{2}\right)$ und $D(2/2)$ $\Rightarrow$ $A_{\triangle BDM} = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Dreieck BQP : $P(x_P / y_P)$; $Q(x_P/2)$ $A(x_P) = \frac{1}{2}(x_P-1)(y_P-2)$

Maximum der Fläche bei $x_P = 2.64$. $A(2.64) = 0.33$

Aufgabe 2 **10.5 Punkte**

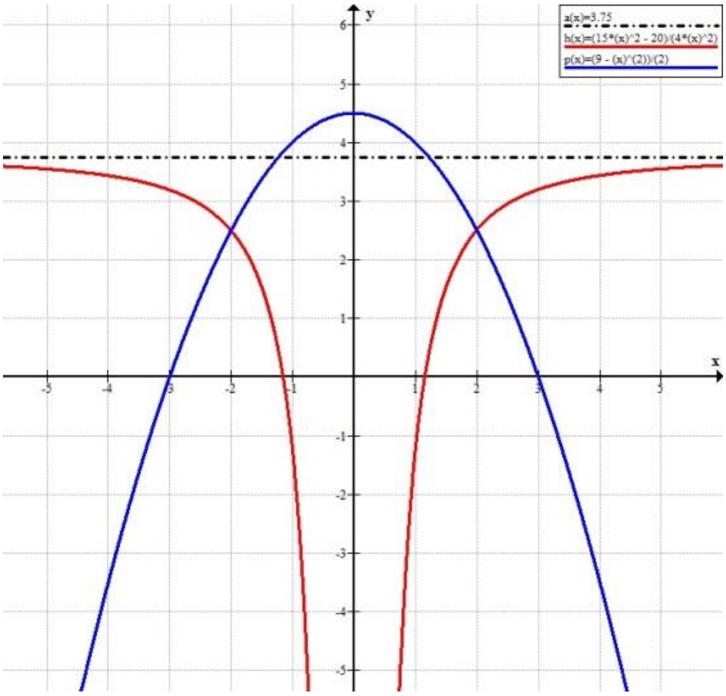
a) Definitionsmengen: $ID_h = IR\setminus\{0\}$ $ID_p = IR$

Nullstellen von $h(x)$: $x_{1/2} = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3} = \pm 1.1547$ Nullstellen von $p(x)$: $x_{1/2} = \pm 3$

waagrechte Asymptote: $a(x) = 3.75$

Schnittpunkte: $S_1(2/2.5)$ und $S_2(-2/2.5)$

Graphen der beiden Funktionen
$h(x)$ [rote Linie]
$p(x)$ [blaue Linie]
$a(x)$ [schwarz, gepunktet]



b) $$A = \lim_{b\to\infty} \int_{\frac{2\sqrt{3}}{3}}^{b} (3.75 - h(x))dx = 5\frac{3}{2\sqrt{3}} = 4.3301$$

c) $$A_1 = A_3 = \int_{\frac{2\sqrt{3}}{3}}^{2} h(x)dx + \int_{2}^{3} p(x)dx = 2.6731$$

$$A_2 = 2\cdot\left(\int_0^2 p(x)dx - \int_{\frac{2\sqrt{3}}{3}}^{2} h(x)dx\right) = 12.6538$$

d) $$V = 2\pi\cdot\int_0^{\frac{\sqrt{6}}{2}} \left(p^2(x) - 3.75^2\right)dx = 31.166$$

Aufgabe 3 — 10.5 Punkte

a) B(2/10/0), C(0/10/0), E(2/0/4), F(2/10/4), H(0/0/4), $\overrightarrow{GP}=\begin{pmatrix}4\\-3\\-3\end{pmatrix}=2\cdot\overrightarrow{DA}-0.3\cdot\overrightarrow{DG}-0.45\cdot\overrightarrow{DH}$

b) $\overrightarrow{AG}=\begin{pmatrix}-2\\10\\4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BH}=\begin{pmatrix}-2\\-10\\4\end{pmatrix}$ Zwischenwinkel: $\cos^{-1}\frac{\overrightarrow{AG}*\overrightarrow{BH}}{|\overrightarrow{AG}||\overrightarrow{BH}|}=131.81°$

c) $E_1:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}-2\\10\\4\end{pmatrix}+v\begin{pmatrix}-2\\-10\\4\end{pmatrix}$ $E_1:\ x+0.5z=2$ P'(0 | 7 | –1)

d) E_2: $2x+y-z=14$ Schnittgerade: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\10\\0\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-1\\4\\2\end{pmatrix}$

Aufgabe 4 — 10.5 Punkte

a) $\binom{15}{5}\cdot\binom{10}{5}\cdot\binom{5}{5}=756'756$

b) $\frac{9!}{(9-5)!}=15'120$

11 + 22 + 33 + 44 + 55 = 165 | 11 + ... + 44 + 66 = 176 | 11 + ... + 44 + 77 = 187
Alle weiteren Möglichkeiten > 180

5! + 5! = 120 + 120 = 240

c) Die Anzahl X der Treffer von Paula ist binomialverteilt mit n = 10 und p = 0.4.

i) $P(X=3)=0.2150$ ii) $P(X\geq 5)=0.3669$

d) $P(X\geq 1)\geq 0.9$ entspricht $P(X=0)\leq 0.1$, also $\binom{n}{0}\cdot 0.4^0\cdot 0.6^n\leq 0.1\quad n=5$

e)

Ergebnis	$3\leq X\leq 4$	$0\leq X\leq 2$ oder $5\leq X\leq 10$
Gewinn von Max	–3 Fr.	2 Fr.
Wahrscheinlichkeit	$P(X=3)+P(X=4)=$ 0.4658	1 – $(P(X=3)+P(X=4))=$ 0.5342

E(Gewinn von Max) = –0.3291 Das Spiel ist nicht fair.

KURZLÖSUNGEN SERIE C

Resultate

1. a. $C(17|6|55)$, $B(24|30|40)$, $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OA}-\underbrace{\overrightarrow{DA}}_{=\overrightarrow{FC}}$ $D(9|0|0)$

b. $V = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF}}_{Grundfläche} \cdot \underbrace{\overrightarrow{DA}}_{Höhe} = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 25 \cdot 50 = 9375$

c. $\mathcal{E}_{AEM}: \; 114x - 227y - 60z + 2724 = 0$ d. $\varphi = 20.695°$ e. $\frac{75}{134}\sqrt{670} \approx 14.488$

2. a. Ableitungen: $f'(x) = \frac{x^3 - 8}{2x^3}$ $f''(x) = \frac{12}{x^4}$ $f'''(x) = -\frac{48}{x^5}$

$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, keine Symmetrie, N(-2/0), T(2/2), kein Wendepunkt

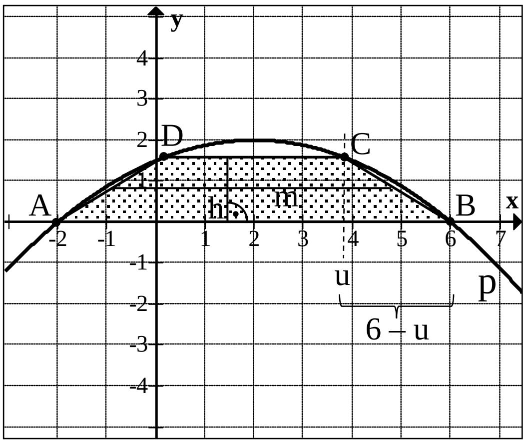
Asymptote: senkrechte Asymptote x = 0 schiefe Asymptote $a(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$

b. $S_1(-2/0)$ and at $S_2(2/2)$

c. c_1. $G = m \cdot h$

$$m = \frac{8 + (8 - 2(6 - u))}{2}$$
$$= \frac{16 - 12 + 2u}{2} = 2 + u$$

h = p(u) $\Rightarrow$ $G(u) = p(u) \cdot (u + 2)$



c_2. $C\left(\frac{10}{3} / \frac{16}{9}\right)$

3. a. F = 4 b. $p(x) = \frac{15}{8}x^2 - 14x + \frac{41}{2}$ c. $d = 6$ d. $k = \frac{3}{e}$

e. Die Steigung des Graphen an der Nullstelle beträgt e^2, $\varphi \approx 82.293°$

4. a1. 210 a2. 126 b. 288 c1. 2.96% c2. 7.74% c3. 28.98%
d. 68.81% e. 87 Telefonnummern

KURZLÖSUNGEN SERIE D

Resultate

	a	b	c	Punkte
Aufgabe 1	2	4	3	**9**

a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}; \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow k \cdot \overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BC}$ Vektoren sind nicht kollinear.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$

$D\left(0 \middle| -4 \middle| 4\right)$

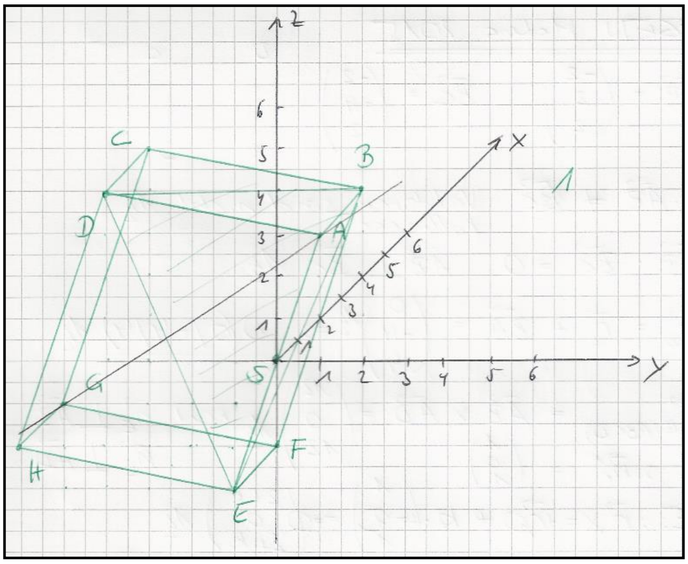
b)

$S\left(0|0|0\right);\ E\left(-2|0|-2\right);\ F\left(-4|2|0\right);\ G\left(-6|-2|2\right);\ H\left(-4|-4|0\right)$

$\left|\overrightarrow{AE}\right| = \left|\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}\right| = 4\sqrt{2} \approx 5.66\,\text{LE}$

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = 2\sqrt{3} \approx 3.64\,\text{LE}$

$\left|\overrightarrow{AD}\right| = \left|\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = 2\sqrt{6} \approx 4.90\,\text{LE}$



c) 1) $\text{Verhältnis} = \dfrac{V_{Tetraeder}}{V_{Rest}} = \dfrac{1}{5}$

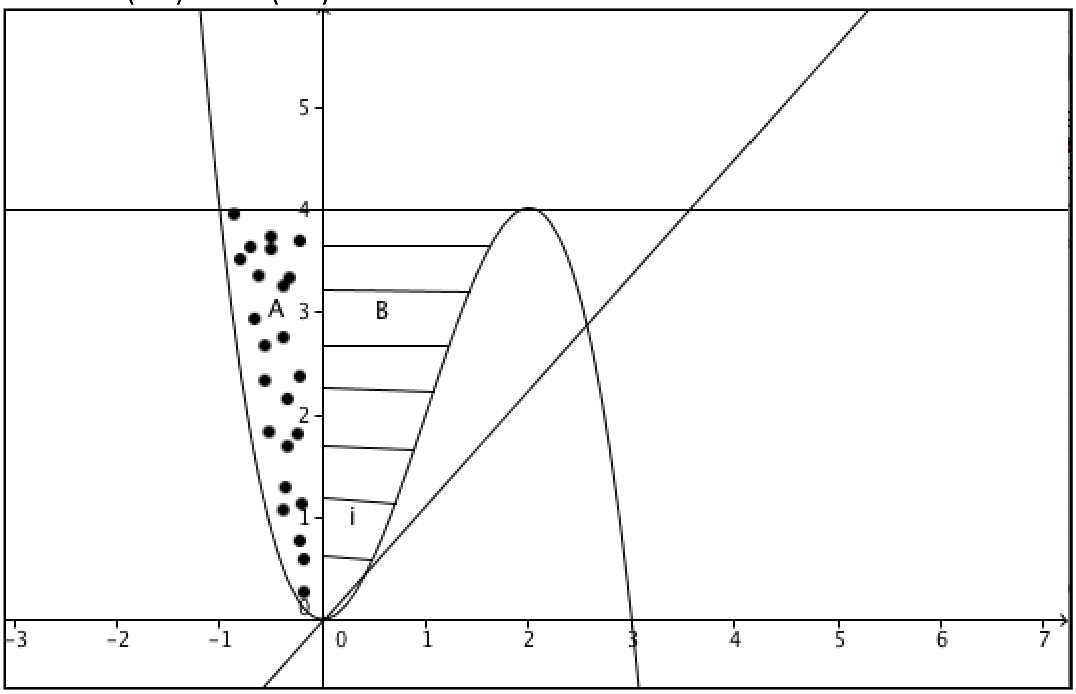
2) a » 67°

	a	b	c	d	e	**Punkte**
Aufgabe 2	2	4	4	4	2	**16**

a) Monoton wachsend für alle $x \in [0;2]$.

Für alle $x < 1$ Linkskurve.

b) $\text{Minimum}(0|0);\ \text{Max}(2|4)$



$$A = \int_{-1}^{0} \left(4 - \left(-x^3 + 3x^2\right)\right)dx = \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + 4x\right]_{-1}^{0} = \frac{11}{4}\text{FE}$$

$$B = \int_{0}^{2} \left(4 - \left(-x^3 + 3x^2\right)\right)dx = \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + 4x\right]_{0}^{2} = 4\text{FE}$$

$A : B = 11 : 16$

c) $mx = -x^3 + 3x^2 \Rightarrow -x\left(x^2 - 3x + m\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

Es gibt genau dann zwei Lösungen wenn

1) $x_1 = x_2 \neq x_3$ oder

2) $x_1 = x_3 \neq x_2$ oder

3) $x_2 = x_3 \neq 0$ ist.

$$x_{2,3} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4m}}{2}$$

1) $x_1 \neq x_2$ weil $x_{2,3} \neq 0$ d.h. als zweite Lösung ist null nicht möglich.

2) $x_1 = x_3$ geht nur wenn $m = 0$. $m = 0$ ist nicht zulässig.

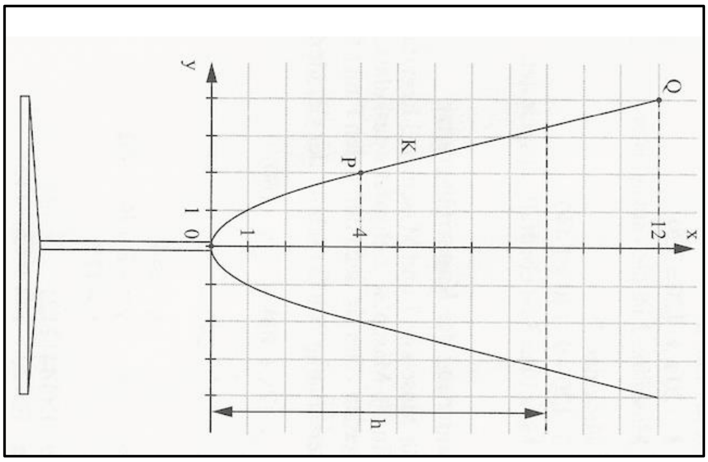
3) $x_2 = x_3 \neq 0$ die Lösungen 2 und 3 fallen zusammen wenn die Diskriminante null ergibt:

$$9 - 4m = 0 \Rightarrow m = \frac{9}{4} \Rightarrow y = \frac{9}{4}x \Rightarrow S_1(0|0), S_2\left(\frac{3}{2}\middle|\frac{27}{8}\right)$$

d) Das globale Minimum ist 2.5 mit einem Abstand von $d(2.5)_{min} \approx 0.52\,\text{LE}$.

e) Die Ortskurve der Wendepunkte ist $y = 2x^3$.

	a	b	c	d	Punkte
Aufgabe 3	2	1	2	1	**6**



Für die Rotation um die x-Achse ist es sinnvoll das Bild um 90° zu drehen.

a) Ableitung der Funktion $f(x)=\sqrt{x}$ ergibt die Steigung der Tangenten:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$t:t(x)=\frac{1}{4}x+1;Q(12|4)$$

b) $V=8\pi\approx 25.13\text{cm}^3$

c) $V(h)=\pi\left(\frac{h^3+12h^2+48h-64}{48}\right)$

Bemerkung: Das Volumen kann auch mit der Volumenformel für Kegelstumpfe berechnet werden.

$V(h)=\frac{\pi}{3}\cdot\bar{h}\left(r_1^2+r_1r_2+r_2^2\right)$ mit $\bar{h}=h-4;r_1=\frac{h}{4}+1;r_2=2$

d) $h\approx 7.8\,\text{cm}$

	a	b	c	Punkte
Aufgabe 4	3	1	2	**6**

a) $P(A) = \frac{1}{216} \approx 0.46\%$

$P(B) = \frac{5}{216} \approx 2.31\%$

$P(C) = \frac{5}{12} \approx 41.7\%$

$P(D) = 1 - \left(P(A) + P(B)\right) - P(C) = \frac{5}{9} \approx 55.6\%$

b) Aus Sicht des Spielers ergibt sich für den Erwartungswert

$E(X) = 48.5 \cdot \frac{1}{216} + 18.5 \cdot \frac{5}{216} + 0.5 \cdot \frac{5}{12} - 1.5 \cdot \frac{5}{9} = 0.3$, d.h. der Spieler gewinnt auf lange Sicht 30 Rappen. Der Betreiber würde also auf lange Sicht einen Verlust machen. Er sollte deshalb den Einsatz erhöhen.

c) $P(\text{Gewinn}) = P(A) + P(B) + P(C) = \frac{4}{9} \Rightarrow P(\text{Verlust}) = \frac{5}{9}$

Man muss mindestens 4mal spielen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% mindestens 1mal zu gewinnen.

	a	b	**Punkte**
Aufgabe 5	3	3	**6**

a) $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + x + 2$

b) 1) 1.25%

2) $P(A) = 45\%$
$P(B) = 0.6 = 60\%$

C ist ein sicheres Ereignis, denn es gibt nur 2mal den Buchstaben R, er kann also höchstens 2mal auftreten: $P(C) = 1 = 100\%$