KANTON LUZERN
Bildungs- und Kulturdepartement

Kantonsschule Luzern

Schriftliche Maturitätsprüfung *2015*

Fach	*Mathematik Grundlagenfach*
Prüfende Lehrperson	*Elisabeth Henrich (elisabeth.henrich@edulu.ch)*
Klassen	*6Ra (mit SF PAM) / 6Rb (mit SF PAM)*
Prüfungsdatum	*26. Mai 2015*
Prüfungsdauer	*180 Minuten*
Erlaubte Hilfsmittel	• *Formelsammlung „Formeln und Tafeln", DMK* • *Taschenrechner TI30, Voyage 200 (ohne Handbuch)*
Anweisungen zur Lösung der Prüfung	• *Es wird Wert auf eine saubere Darstellung gelegt.* • *Jede Aufgabe soll auf einem neuen Bogen begonnen werden und muss einen vollständigen und nachvollziehbaren Lösungsweg enthalten.* • *Jeder Bogen ist mit dem Namen zu beschriften.* • *Der Einsatz der Hilfsmittel ist klar anzugeben.*
Anzahl erreichbarer Punkte	*Aufgabe 1: 9* *Aufgabe 2: 16* *Aufgabe 3: 6* *Aufgabe 4: 6* *Aufgabe 5: 6* *Total: 43* *Die Note 6 wird für 40 Punkte erteilt.*
Anzahl Seiten (inkl. Titelblatt)	*5*

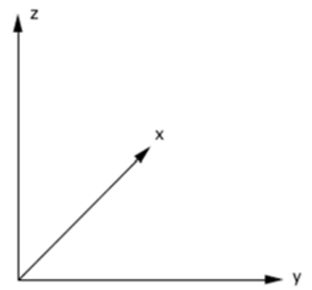
		a	b	c	Punkte
Aufgabe 1	**Vektorgeometrie**	2	4	3	**9**

In einem dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(2|0|2), B(0|2|4)$ und $C(-2|-2|6)$ gegeben.

a) Zeigen Sie, dass sich die Punkte A, B, C zu einem Rechteck ABCD ergänzen lassen, und bestimmen Sie den vierten Eckpunkt D.

b) Bestimmen Sie vier Punkte E, F, G und H so, dass ein Quader ABCDEFGH entsteht $\left(\text{mit } \overline{AE} \parallel \overline{BF} \parallel \overline{CG} \parallel \overline{DH}\right)$, dessen Kante $\overline{AE}$ von der xy-Ebene halbiert wird.

Berechnen Sie die Kantenlänge des Quaders und skizzieren Sie den Quader in einem Schrägbild (wählen Sie die Koordinatenachsen wie im Bild unten).



c) ε sei die Ebene, auf der die Punkte B, D und E liegen.

1) ε teilt den Quader in zwei Teile. Berechnen Sie das Volumenverhältnis dieser beiden Teile.

2) In welchem Winkel schneidet die Raumdiagonale $\overline{AG}$ die Ebene ε.

		a	b	c	d	e	Punkte
Aufgabe 2	**Analysis**	2	4	4	4	2	**16**

Für alle reellen t ist die Funktion f_t gegeben durch $f_t(x) = -x^3 + t \cdot x^2$.
K_t ist der Graph von f_t.

a) Zeigen Sie, dass f_3 für $0 \le x \le 2$ monoton wächst.
Für welche Werte von x ist K_3 linksgekrümmt?
Begründen Sie ihre Antwort.

b) Die Parallele zur x-Achse durch den Hochpunkt von K_3 begrenzt mit K_3 eine Fläche, die von der y-Achse in zwei Teilflächen zerlegt wird.
Zeichnen Sie K_3 und kennzeichnen Sie diese Flächen.
Berechnen Sie das Verhältnis der Inhalte der beiden Teilflächen.

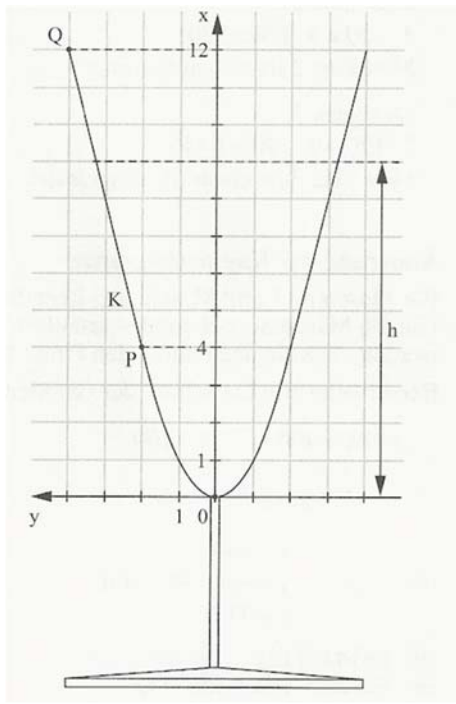
c) Die Gerade g hat die Gleichung $y = mx$. Zeigen Sie, dass es nur ein positives m gibt, so dass g und K_3 genau zwei gemeinsame Punkte besitzen. Geben Sie deren Koordinaten an.

d) Bestimmen Sie den Punkt auf K_3, der von $Q(2|3)$ den kleinsten Abstand hat.
Berechnen Sie diesen kleinsten Abstand.

e) Bestimmen Sie die Ortskurve der Wendepunkte aller K_t; d.h. Bestimmen Sie die Kurve auf welcher sich alle Wendepunkte von K_t.befinden.

		a	b	c	d	**Punkte**
Aufgabe 3	**Analysis**	2	1	2	1	**6**

Das Bild zeigt den Querschnitt eines Sektglases. Der Kelch des Glases entsteht durch Rotation des Schaubildes K (siehe Skizze) um die x-Achse. Das Schaubild setzt sich zusammen aus dem Kurvenbogen OP und der Strecke PQ, welche den Kurvenbogen OP im Punkt P tangential bis Q verlängert. Die Wanddicke ist zu vernachlässigen.



Punkt O ist der Koordinatenursprung,
Punkt P besitzt die x-Koordinate 4,
Punkt Q die x-Koordinate 12.

Der Kurvenbogen OP wird beschrieben durch das Schaubild der Funktion f mit

$$f(x) = \sqrt{x}; 0 \le x \le 4.$$

Eine Längeneinheit im Bild entspricht 1 cm im Original.

a) Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente des Schaubildes K im Punkt P.
Zeigen Sie, dass Q die y-Koordinate 4 hat.

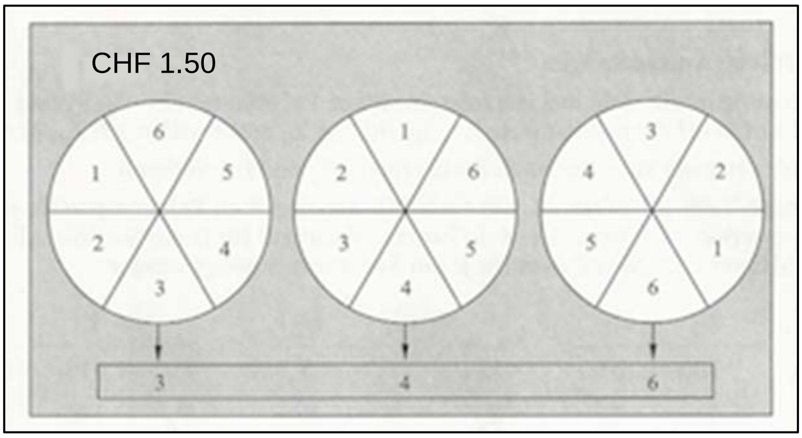
b) Das aufrecht stehende Glas wird bis zur Füllhöhe $h_1 = 4$ mit Sekt gefüllt.
Wie viel cm^3 Sekt sind in diesem Glas?

c) Jetzt wird mehr Sekt in das Glas gefüllt.
Berechnen Sie das Flüssigkeitsvolumen V in Abhängigkeit von der Einfüllhöhe h für $4 \le h \le 12$.

d) Bei welcher Einfüllhöhe sind 0.1 Liter Sekt im Glas?

		a	b	c	Punkte
Aufgabe 4	**Wahrscheinlichkeitsrechnung**	3	1	2	**6**

Ein Glücksspielautomat hat drei Räder mit jeweils 6 gleich grossen Sektoren (siehe Abbildung). Die Räder drehen sich unabhängig voneinander.



Der Betreiber des Spielautomaten (die Klasse 6Ra) verlangt einen Einsatz von CHF 1.50 pro Spiel und überlegt sich folgenden Auszahlungsplan:

Ereignis	**Auszahlung**
A : Alle drei Räder zeigen „1“, d.h. $\boxed{1\ \ 1\ \ 1}$.	CHF 50.-
B : Alle drei Räder zeigen die gleiche Ziffer, aber nicht 1.	CHF 20.-
C : Genau zwei Räder zeigen die gleiche Ziffer.	CHF 2.-
D : Alle Räder zeigen unterschiedliche Ziffern.	CHF 0.-

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für jedes der Ereignisse A, B, C und D.

b) Begründen Sie rechnerisch, weshalb der Automatenbetreiber seinen Auszahlungsplan ändern sollte.

c) Wie oft muss das Spiel mindestens gespielt werden, um mit der Wahrscheinlichkeit von mehr als 90% mindestens einmal zu gewinnen?

		a	b	Punkte
Aufgabe 5	**Vermischte Aufgaben**	3	3	**6**

Lösen Sie die zwei voneinander unabhängigen Kurzaufgaben.

a) Der Graph einer Polynomfunktion 4. Grades geht durch den Punkt $S\left(0\middle|2\right)$ und hat den Wendepunkt $W\left(1\middle|\frac{31}{12}\right)$. Die Senkrechte zum Graphen durch den Punkt $P\left(-3\middle|\frac{5}{4}\right)$ hat die Steigung $\frac{1}{5}$.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.

b) Reto hat ein Buchstabenlegespiel erhalten. In einem Säcklein befinden sich 16 gleichartige Spielsteine. Auf jedem ist genau ein Buchstabe aufgedruckt, auf sieben Steinen der Buchstabe A, auf vier der Buchstabe L, auf drei der Buchstabe T und auf zwei der Buchstabe R. Reto probiert zwei Spielvarianten aus.
1) Bei der ersten Spielvariante zieht Reto ohne Zurücklegen drei Steine. Er legt diese, die aufgedruckten Buchstaben lesbar, von links beginnend auf den Tisch.
Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass die gezogenen Buchstaben das Wort „RAT“ ergeben.
2) Bei einer zweiten Spielvariante zieht Reto mit einem Griff drei Steine.
Geben Sie die Wahrscheinlichkeit für die folgenden Ereignisse an:
Ereignis A: Auf genau einem der gezogenen Steine steht der Buchstabe A.
Ereignis B: Auf mindestens zwei der gezogenen Steine steht ein Konsonant.
Ereignis A: Auf höchstens zwei der gezogenen Steine steht der Buchstabe R.