KANTON LUZERN
Bildungs- und Kulturdepartement

Kantonsschule Alpenquai Luzern

Schriftliche Maturitätsprüfung 2015

Fach	Grundlagenfach Mathematik
Prüfende Lehrpersonen	Adrian Häfliger adrian.haefliger@edulu.ch Claudia Sänger claudia.saenger@edulu.ch Markus T. Schmid markust.schmid@edulu.ch
Klassen	6Lb, 6Na, 6Nb, 6Rc
Prüfungsdatum	Dienstag, 26. Mai 2015
Prüfungsdauer	180 Minuten
Erlaubte Hilfsmittel	- Formelsammlung „Formeln, Tabellen, Begriffe" - Taschenrechner: TI-Voyage200 (ohne Handbuch), zusätzlich ein Rechner vom Typ TI-30
Anweisungen zur Lösung der Prüfung	- Es wird Wert auf eine saubere Darstellung gelegt. - Jede Aufgabe soll einen vollständigen und nachvollziehbaren Lösungsweg enthalten. - Jede Aufgabe soll auf einem neuen Bogen begonnen werden. - Jeder Bogen ist mit dem Namen zu beschriften.
Anzahl erreichbarer Punkte	Aufgabe 1: 10.5 Aufgabe 2: 10.5 Aufgabe 3: 10.5 Aufgabe 4: 10.5 Total: 42 Für die Note 6 werden mindestens 38 Punkte benötigt.
Anzahl Seiten (inkl. Titelblatt)	5

	a	b	c	Punkte
Aufgabe 1 – Analysis	4	2.5	4	**10.5**

Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = \dfrac{10x}{4+x^2}$.

a) Bestimmen Sie die Nullstelle, die Extrem- und Wendepunkte der Funktion $f(x)$ und zeichnen Sie mithilfe dieser Punkte den Graph von $f(x)$.
[1 Einheit = 4 Häuschen]

b) Bestimmen Sie die Tangente $t(x)$ an den Graphen von $f(x)$ an der Stelle x = 1. Neben dem Berührpunkt an der Stelle x = 1 schneiden sich die Graphen der Funktion f(x) und der Tangente t(x) noch in einem weiteren Punkt S. Berechnen sie die Grösse des Schnittwinkels der beiden Graphen im Punkt S.

c1) Die Gerade mit der Gleichung $y = 2$ schneidet den Graphen von $f(x)$ in den Punkten B und C. Bestimmen Sie die Koordinaten dieser Punkte, wobei $x_B < x_C$ gilt.
M ist der Extrempunkt von $f(x)$ im 1. Quadranten (siehe Aufgabe 1a). Die Senkrechte durch den Punkt M auf die Gerade (BC) schneidet diese Gerade im Punkt D [Lotfusspunkt von M auf die Gerade (BC)]. Berechnen Sie nun den Flächeninhalt des Dreiecks BDM.

c2) Seien P(x_P | $f(x_p)$) ein Punkt auf dem Graphen von $f(x)$, dessen x-Koordinate zwischen jenen von B und C liegt, und Q der Lotfusspunkt von P auf die Gerade (BC).
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks BQP in Abhängigkeit von x_P.
Wann wird dieser Flächeninhalt maximal?
Geben Sie den Wert dieses maximalen Flächeninhalts an.

	a	b	c	d	**Punkte**
Aufgabe 2 – Analysis	3.5	2	3	2	**10.5**

Gegeben sind zwei Funktionen h und p durch die Funktionsgleichung $h(x) = \frac{15x^2 - 20}{4x^2}$ sowie die Funktionsgleichung $p(x) = \frac{9 - x^2}{2}$.

a) Bestimmen Sie die Definitionsmengen und die Nullstellen der beiden Funktionen $h(x)$ und $p(x)$ sowie die waagrechte Asymptote der Funktion $h(x)$. Berechnen Sie zudem die Schnittpunkte der Graphen der beiden Funktionen $h(x)$ und $p(x)$.
Zeichnen Sie die Graphen der beiden Funktionen $h(x)$ und $p(x)$ in ein Koordinatensystem für $-5 < x < 5$ [1 Einheit = 2 Häuschen].

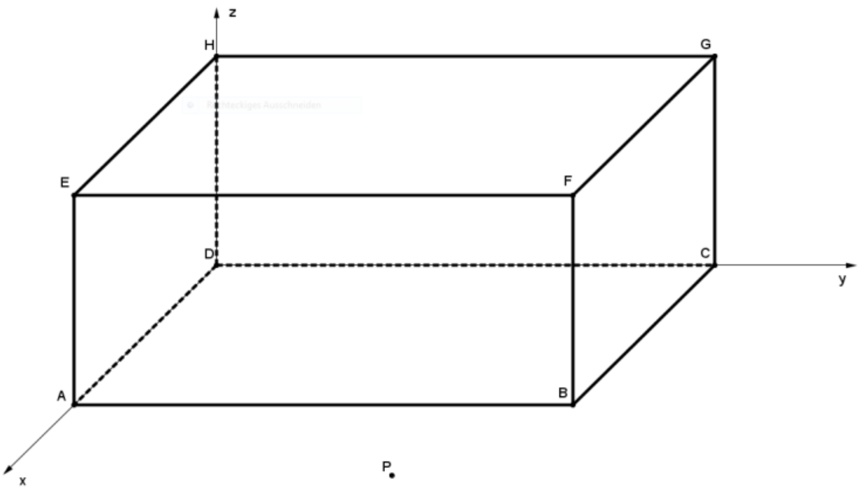
b) Im 1. Quadranten wird durch den Graphen von $h(x)$, die waagrechte Asymptote von $h(x)$ und die senkrechte Gerade durch die Nullstelle von $h(x)$ eine nach rechts unbeschränkte Fläche begrenzt. Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.

c) Der Graph von $h(x)$ unterteilt die Fläche, die der Graph von $p(x)$ und die x-Achse miteinander einschliessen, in drei Teile. Berechnen Sie den Inhalt jeder dieser Fläche.

d) Die Fläche zwischen dem Graphen von $p(x)$ und der Geraden mit der Funktionsgleichung $y = 3.75$ rotiert um die x-Achse. Berechnen Sie das Volumen des durch die Rotation entstandenen Körpers.

	a	b	c	d	Punkte
Aufgabe 3 – Vektorgeometrie	2	2	4	2.5	**10.5**

Von dem in der Abbildung dargestellten Quader ABCDEFGH sind die Punkte A(2 | 0 | 0) und G(0 | 10 | 4) gegeben, der Punkt D liegt im Ursprung des Koordinatensystems. Der Punkt P hat die Koordinaten (4 | 7 | 1).



a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte B, C, E, F und H sowie den Vektor $\overrightarrow{GP}$.
Stellen Sie zudem den Vektor $\overrightarrow{GP}$ als Linearkombination der Ortsvektoren $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DG}$ und $\overrightarrow{DH}$ dar.

b) Berechnen Sie den Schnittwinkel zwischen den Raumdiagonalen AG und BH.

c) Die Raumdiagonalen AG und BH liegen in der Ebene E_1. Durch Spiegelung des Punktes P an der Ebene E_1 entsteht der Punkt P‘.
Bestimmen Sie die Koordinatengleichung der Ebene E_1 und die Koordinaten von P‘.

d) Die Ebene E_2 ist parallel zur Ebene E_3: $2x + y - z = 0$ und enthält den Punkt P.
Bestimmen Sie die Schnittgerade der beiden Ebenen E_1 und E_2.

	a	b	c	d	e	Punkte
Aufgabe 4 – Wahrscheinlichkeitsrechnung	1	2.5	2.5	2	2.5	**10.5**

Im Rahmen des Sporttages einer Schule findet ein Basketballnachmittag statt. 15 Schülerinnen nehmen daran teil.

a) Auf wie viele Arten können aus den 15 Schülerinnen die Teams A, B und C mit je 5 Spielerinnen gebildet werden?

b) Die 5 Spielerinnen des Teams A erhalten je ein blaues Trikot mit Rückennummern. Es stehen die Trikots mit den Nummern 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88 und 99 zur Auswahl.
   i) Wie viele Möglichkeiten gibt es, die fünf Spielerinnen mit den Trikots auszurüsten?
   ii) Bei wie vielen dieser Möglichkeiten ist die Summe der Nummern kleiner als 180?

Im Anschluss an die Basketballspiele findet ein Freiwurfwettbewerb statt. Paulas Trefferwahrscheinlichkeit liegt bei 40%.

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Paula bei 10 Würfen ...
   i) ... genau 3-mal trifft.
   ii) ... mindestens 5-mal trifft.

d) Wie oft muss Paula mindestens werfen, damit sie mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% wenigstens einmal trifft?

e) Max und Moritz sehen sich die 10 Würfe von Paula an. Sie verabreden folgendes Spiel: Max gibt Moritz 3 Franken, wenn Paula mehr als 2 und weniger als 5 Treffer erzielt. Andernfalls erhält Max von Moritz 2 Franken. Ist dieses Spiel fair? Begründen Sie ihre Entscheidung durch eine Berechnung.