

Schriftliche Maturitätsprüfung 2015

Fach	Grundlagenfach Mathematik
Prüfende Lehrpersonen	Essodinam Alitiloh essodinam.alitiloh@edulu.ch Stefan Müller stefan.mueller@edulu.ch Esfandiar Shafai esfandiar.shafai@edulu.ch
Klassen	6La, 6Wb, 6Wc, 7Sa
Prüfungsdatum	Dienstag, 26. Mai 2015
Prüfungsdauer	180 Minuten
Erlaubte Hilfsmittel	- Formelsammlung „Formeln, Tabellen, Begriffe“ - Taschenrechner: TI-Voyage200 (ohne Handbuch), zusätzlich ein Rechner vom Typ TI-30
Anweisungen zur Lösung der Prüfung	- Es wird Wert auf eine saubere Darstellung gelegt. - Jede Aufgabe soll einen vollständigen und nachvollziehbaren Lösungsweg enthalten. - Jede Aufgabe soll auf einem neuen Bogen begonnen werden. - Jeder Bogen ist mit dem Namen zu beschriften.
Anzahl erreichbarer Punkte	Aufgabe 1: 12 Aufgabe 2: 10 Aufgabe 3: 10 <u>Aufgabe 4: 10</u> Total: 42 Für die Note 6 werden mindestens 38 Punkte benötigt.
Anzahl Seiten (inkl. Titelblatt)	5

	a	b	c	d	e	f	Punkte
Aufgabe 1 [Vektorgeometrie]	2	2	2	2	2	2	12

Der Punkt $S(3/2/-1)$ ist die Spitze einer geraden Pyramide mit der quadratischen Grundfläche $ABCD$. Die Punkte A, B, C und D liegen in der Ebene $E: 2x - y - 2z + 12 = 0$.

- a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Ecke A , die auf der Geraden g liegt, welche durch die Spitze S und durch den Punkt $P(9/0/-3)$ bestimmt ist.
- b) Zeigen Sie, dass $F(-1/4/3)$ der Fusspunkt der Höhe der Pyramide ist und bestimmen Sie die Koordinaten der Ecke C .

Verwenden Sie in den folgenden Teilaufgaben c) – f) die Punkte $A(0/2/5)$ und $C(-2/6/1)$, unabhängig davon, welche Punkte A und C Sie in a) und b) berechnet haben.

Bemerkung: Die neu zur Verfügung gestellten Punkte A und C entsprechen nicht den richtigen Resultaten der Teilaufgaben a) und b). Sie liegen aber beide in der gegebenen Ebene E .

- c) Zeigen Sie, dass $D(-3/2/2)$ die vierte Ecke der Grundfläche $ABCD$ ist.
- d) Bestimmen Sie das Volumen V der Pyramide.

- e) Zeigen Sie, dass die Seitenkante AS und die Gerade $q: \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ windschief zueinander sind.

- f) Bestimmen Sie die Koordinatengleichung der Ebene F , welche durch die Seitenfläche ADS definiert ist, und bestimmen Sie den kleineren Schnittwinkel dieser Ebene F mit der Pyramidengrundfläche.

	a	b	c	d	Punkte
Aufgabe 2 [Analysis]	3	2	3	2	10

- a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades, deren Graph G_f durch die drei Punkte $A(-1/5)$, $B(0/3)$ und $C(2/2)$ geht und in B von einer Rechts- in eine Linkskurve wechselt.

Gegeben sind nun zwei Funktionen $g: y = g(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{5}{2}x + 1$ und $h: y = h(x) = -x^2 + 4$.

- b) Zeichnen Sie die Graphen G_g und G_h der beiden Funktionen (achten Sie dabei darauf, dass die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen korrekt eingetragen sind) und berechnen Sie die Schnittpunkte der Graphen.
- c) Einer der in b) berechneten Schnittpunkte liegt auf der x-Achse. Berechnen Sie den spitzen Schnittwinkel der beiden Graphen in diesem Schnittpunkt.
- d) Die beiden Graphen G_g und G_h begrenzen eine endliche Fläche. Berechnen Sie den Flächeninhalt dieser Fläche.

	a	b	c	d	e	Punkte
Aufgabe 3 [Analysis]	1	0.5	3.5	2	3	10

Gegeben ist die Funktion $f : y = f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 8$

- a) Zeichnen Sie den Graphen von f in einem Koordinatensystem mit Angabe der Null- und Extremalstellen des Graphen ein.

Dem Flächenstück F , das von der x -Achse und dem Graphen von f begrenzt wird, werden Rechtecke so einbeschrieben, dass jeweils eine Rechteckseite auf der x -Achse liegt.

- b) Zeichnen Sie ein beliebiges solches Rechteck $ABCD$, mit den Ecken A und B auf der x -Achse und den Ecken C und D auf dem Graphen von f , in der Zeichnung der Teilaufgabe a) ein.
- c) Berechnen Sie die Koordinaten der Ecken A , B , C und D eines solchen Rechtecks, dessen Flächeninhalt maximal ist.
- d) Berechnen Sie, wie viel Prozent des Flächenstücks F , vom Rechteck maximalen Flächeninhalts aus Teilaufgabe c), bedeckt werden.

Das Rechteck R sei ein wie oben beschriebenes Rechteck, dessen vertikale Seite die Länge 6 besitzt. Lässt man das Flächenstück F ohne die Fläche des Rechtecks R um die x -Achse rotieren, so entsteht ein Rotationskörper mit Volumen V .

- e) Berechnen Sie dieses Volumen V .

	a	b	c	d	e	f	g	Punkte
Aufgabe 4 [Stochastik]	1	1	1	2	1	2	2	10

Beim Endspiel einer Fussballmeisterschaft zwischen den Mannschaften A und B muss die Siegermannschaft durch ein Elfmeterschiessen bestimmt werden. Vor dem Elfmeterschiessen ist jede Mannschaft noch vollständig, d.h. sie besteht aus einem Torhüter und 10 weiteren Spielern, den sogenannten Feldspielern.

Der Trainer jeder Mannschaft muss aus den zur Verfügung stehenden 10 Feldspielern 5 Schützen auswählen. Bei der Mannschaft A sind 4 der 10 Feldspieler ausländische Spieler.

- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass unter den 5 ausgewählten Schützen der Mannschaft A, sich genau zwei ausländische Spieler befinden, wenn der Trainer die 5 Schützen rein zufällig auswählen würde.
- Der Trainer muss die Reihenfolge der 5 Schützen der Mannschaft A bestimmen. Wie viele Aufstellungen sind grundsätzlich möglich?
- Wie viele Aufstellungen sind möglich, wenn sich unter den Schützen der Mannschaft A zwei ausländische Spieler befinden und diese unbedingt nacheinander aufgestellt werden möchten?

Nehmen Sie für die folgenden Teilaufgaben an, dass jeder der Schützen aus beiden Mannschaften mit 4 Elfmeterschüssen durchschnittlich 3 Tore erzielt. Nehmen Sie weiter auch an, dass beim Elfmeterschiessen jeder Schütze nur einmal schießen darf und dass das Elfmeterschiessen nicht frühzeitig wegen uneinholbarer Tordifferenz beendet wird, sodass also jeder der 5 Schützen seinen Elfmeterstoss ausführt.

- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens 2 Schützen der Mannschaft A einen Elfmertertreffer erzielen.
- Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Mannschaften nach je 5 Elfmetern alle 5 Tore erzielt haben, so dass das Elfmeterschiessen fortgesetzt werden muss?
- Wie viele Elfmeter müssen geschossen werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95%, mindestens einer der Schützen der Mannschaft A oder B kein Tor erzielt?
- Ein Anhänger der Mannschaft A wettet mit einem seiner Kollegen, dass die Mannschaft A bei allen 5 Elfmetern ein Tor erzielt. Sie vereinbaren, dass er seinem Kollegen in allen anderen Fällen 5 Franken bezahlen wird. Wieviel sollte der Kollege seinerseits bezahlen, wenn also die Mannschaft A tatsächlich alle 5 Tore erzielt hat, damit die Wette fair ist?