

	a	b	c	
Aufgabe 1: Kubikwurzeln	3	4	3	10 Punkte

Da 26 nahe bei $27 = 3^3$ liegt, lässt sich abschätzen, dass die Kubikwurzel $\sqrt[3]{26}$ zwischen 2.9 und 3 liegt. Weitere Nachkommastellen können mit Hilfe von Rechenverfahren gewonnen werden.

a) Ein besonders effizientes Verfahren ist eine Abänderung des Heron-Verfahrens, das wir den “kubischen Heron” genannt haben. Benutzen Sie den “kubischen Heron”, um $\sqrt[3]{26}$ auf 4 Nachkommastellen genau zu berechnen. Starten Sie mit dem Näherungswert 3. Elementaroperationen (+, −, ·, :) dürfen Sie mit dem Taschenrechner durchführen, nicht jedoch das Radizieren (Wurzelziehen). Warum sind Sie sich sicher, dass Ihr Ergebnis auf 4 Nachkommastellen genau ist?

b) Ein anderes sehr altes Verfahren ist das Bisektionsverfahren, das ebenfalls benutzt werden kann, um solche Näherungsprobleme zu lösen. Das Verfahren ist sehr einfach. Erklären Sie am Beispiel der Gewinnung einer Näherung von $\sqrt[3]{26}$, wie dieses Verfahren funktioniert, und machen Sie deutlich, worin der grosse Nachteil des Verfahrens liegt.

c) Um die kubische Gleichung

$$x^3 - 9x = 10$$

zu lösen, können die Parameter $p = -9$ und $q = 10$ in die Cardanische Formel eingesetzt werden. Für die Lösung ergibt sich dann der folgende Ausdruck:

$$x = \sqrt[3]{5 + \sqrt{2} \cdot i} + \sqrt[3]{5 - \sqrt{2} \cdot i}$$

In diesem Ausdruck müssen die Kubikwurzeln von $z_1 = 5 + \sqrt{2} \cdot i$ und von $z_2 = 5 - \sqrt{2} \cdot i$ gezogen werden. Hierfür taugen der “kubische Heron” und das Bisektionsverfahren nicht mehr. Einen möglichen Ausweg liefert die Potenzierungsformel von *de Moivre*.

Benutzen Sie die Potenzierungsformel von *de Moivre*, um Polarformen von $\sqrt[3]{z_1}$ und $\sqrt[3]{z_2}$ zu berechnen, die sich nur im Vorzeichen des Arguments unterscheiden. Bestimmen Sie anschliessend mit den erhaltenen Resultaten die Lösung x der obigen kubischen Gleichung.

	a	b	c	d	e	
Aufgabe 2: Populationsmodelle	1.5	1	2	1	2.5	8 Punkte

Im Jahre 1715 wurden 5 Hasen auf einer einsamen Pazifikinsel ausgesetzt, um die Frischfleischversorgung bei künftigen Besuchen zu sichern. Ein Jahr später wurden bereits 12 Hasen gesichtet.

a) Wie viele Hasen wären bei der Annahme exponentiellen Wachstums im Jahre 1721 auf der Insel zu erwarten?

b) Nach jeweils wie vielen Monaten verdoppelt sich der Bestand unter der Annahme exponentiellen Wachstums?

c) Tatsächlich wurden auch Jahrzehnte nach der Aussetzung niemals mehr als 100 Hasen auf der Insel gezählt. Setzen Sie logistisches Wachstum an und berechnen Sie den Änderungsfaktor λ auf 4 Nachkommastellen genau.

d) Wie viele Hasen wären im Jahr 1721 auf der Insel zu erwarten, wenn man den Ansatz für logistisches Wachstum verwendet?

e) Nach wie vielen Jahren ist das momentane Wachstum der Hasenpopulation am stärksten, wenn logistisches Wachstum vorausgesetzt wird?

	a	b	c	
Aufgabe 3: Vektorgeometrie	4.5	3	1.5	9 Punkte

Gegeben sind die Punkte $A(19/16/40)$, $B(34/22/32)$ und $C(28/-26/-18)$.

a) Die Ebene E geht durch die Punkte A , B und C . Es gibt zwei Ebenen, die zu E parallel liegen und von ihr den Abstand 22 haben. Zeigen Sie, dass die Ebene E' mit der Koordinatengleichung $E' : 6x - 7y + 6z = 0$ diese Eigenschaft hat.

b) Eine (nicht gerade) Pyramide hat das Dreieck ABC als Grundfläche. Sie schneidet die Ebene E' aus Teilaufgabe a) und hat die Höhe $h = 44$. Ihre Spitze S liegt auf der Geraden

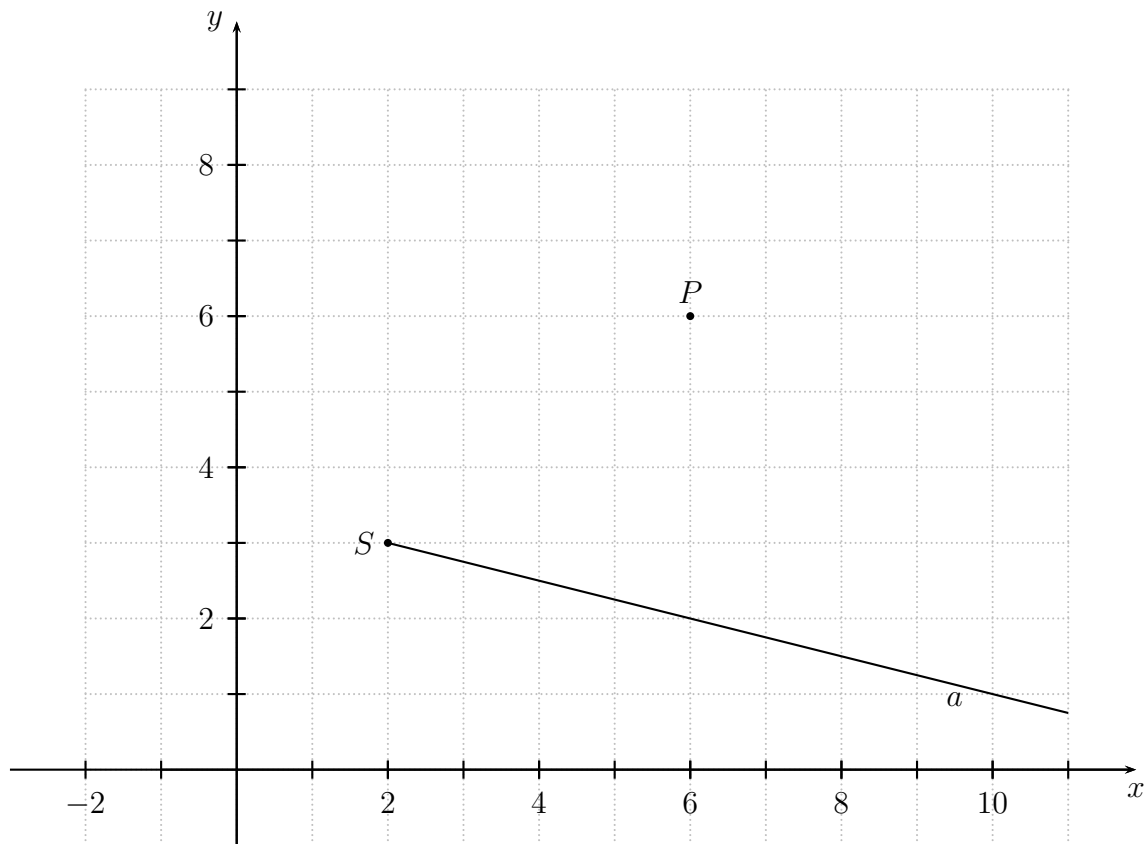
$$g : \vec{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 22 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Spitze S .

c) Welches Volumen hat die Pyramide?

Aufgabe 4: Parabel	5 Punkte
---------------------------	-----------------

Von einer Parabel sind der Scheitel S , die Parabelachse a sowie ein Kurvenpunkt P gegeben. Konstruieren Sie (auf diesem Blatt) den Brennpunkt F der Parabel und lesen Sie aus der Konstruktion den Parabelparameter p ab. Machen Sie Ihr Vorgehen transparent.



	a1	a2	b1	b2	
Aufgabe 5: Statistische Tests	1	5	2.5	1.5	10 Punkte

Im Kanton Zürich müssen Schüler eine Aufnahmeprüfung im Fach Mathematik schreiben, wenn sie das Langzeitgymnasium besuchen wollen. Eine Folgeerscheinung der Aufnahmeprüfung ist, dass öffentliche Schulen sowie Privatfirmen Vorbereitungskurse anbieten.

a) Die Gemeinden Scheunikon und Unterfelden führen öffentliche Vorbereitungskurse durch. Scheunikon bereitet seine Schüler konventionell vor, Unterfelden jedoch verwendet erstmals eine Methode, die eine bessere Erfolgsquote verspricht. Die beiden Gemeinden vergleichen nun die Prüfungsergebnisse und erhoffen sich Aussagen über die Güte der verwendeten Kursmethoden.

a1) Formulieren Sie die Hypothesen in Worten.

a2) Die von den Schülern erzielten Punktetotale an der Mathematikprüfung:

Scheunikon	45	52	55	56	64	
Unterfelden	47	57	61	65	69	71

Berechnen Sie die Rangsummen für die beiden Kurse.

Führen Sie den Rangsummentest von Wilcoxon-Mann-Whitney mit dem Sicherheitsniveau 5% durch. Leiten Sie die Entscheidungsregel her, indem Sie für Scheunikon eine detaillierte Liste der möglichen Rangsummen mit ihren Häufigkeiten erstellen.

Darf auf Grund der Prüfungsergebnisse behauptet werden, die neue Kursmethode von Unterfelden führe zu besseren Resultaten als die konventionelle?

b) In der Gemeinde Althausen wird der Vorbereitungskurs seit Jahren von Frau Stoffer geleitet. Alle ehemaligen Kursteilnehmer haben den Übertritt ans Gymnasium geschafft. Frau Stoffer möchte herausfinden, ob ihr Kurs einen grossen Anteil an dieser Erfolgsquote hat.

Sie schickt den ehemaligen Kursteilnehmern einen Fragebogen mit der Frage: "Sind Sie der Meinung, Sie hätten den Übertritt ans Gymnasium ohne Vorbereitungskurs nicht geschafft?"

Sie will ihrem Kurs das Prädikat "super erfolgreich" verleihen, wenn mehr als 75% der ehemaligen Kursteilnehmer auf die gestellte Frage mit Ja antworten. Von insgesamt 35 Kursteilnehmern erhält sie eine Rückmeldung; das ist leider nur ein Bruchteil der gesamten Kursteilnehmerschaft. Die Rückmeldungen sind zufällig.

Frau Stoffer wählt die folgenden Hypothesen:

H_0 : genau 75% aller ehemaligen Kursteilnehmer antworten mit Ja, Prädikat "super erfolgreich" wird nicht verliehen

H_1 : mehr als 75% aller ehemaligen Kursteilnehmer antworten mit Ja, Prädikat "super erfolgreich" wird verliehen

b1) Wie viele der 35 Kursteilnehmer müssen auf die gestellte Frage mit Ja antworten, damit Frau Stoffer ihrem Kurs das Prädikat "super erfolgreich" auf Signifikanzniveau $\alpha = 5\%$ verleiht?

b2) Mit welcher Wahrscheinlichkeit verleiht Frau Stoffer ihrem Kurs das Prädikat "super erfolgreich" nicht (Fehler 2. Art), wenn sogar 85% **aller** Kursteilnehmer die gestellte Frage mit Ja beantworten würden? Verwenden Sie den Verwerfungsbereich aus b1).

	a	b	c	
Aufgabe 6: Spieltheorie	2	2	2	6 Punkte

In Eglisau (ZH) war Vivi Kola von 1938 bis 1986 ein Kultgetränk. Nun soll das Getränk in der Region wieder zum Sprudeln gebracht werden. Bisher ist Coca-Cola Monopolist auf diesem Markt.

Vivi Kola erarbeitet sich vier Werbestrategien, um sich auf dem Markt zu platzieren: S_1 , S_2 , S_3 und S_4 . Durch Spionage weiss Coca-Cola darüber perfekt Bescheid und entwickelt fünf Gegenstrategien: G_1 , G_2 , G_3 , G_4 und G_5 . Vivi Kola bekommt ebenfalls Wind davon und beauftragt ebenso wie Coca-Cola ein Marktforschungsinstitut, das die Wirksamkeit der Strategien für alle eventuellen Gegenstrategien erforscht.

Je nach Strategie von Vivi Kola wandern die folgenden Anzahlen von Kunden zu Vivi Kola über:

- für S_1 sind es 20 000 (beim Konter durch Coca-Cola mit G_1), 30 000 (bei G_2), 70 000 (bei G_3), 50 000 (bei G_4) oder 60 000 (bei G_5) Kunden
- für S_2 sind es 10 000 (bei G_1), 40 000 (bei G_2), 60 000 (bei G_3), 80 000 (bei G_4) oder 30 000 (bei G_5) Kunden
- für S_3 sind es 90 000 (bei G_1), 50 000 (bei G_2), 80 000 (bei G_3), 60 000 (bei G_4) oder 40 000 (bei G_5) Kunden
- für S_4 sind es 30 000 (bei G_1), 40 000 (bei G_2), 50 000 (bei G_3), 70 000 (bei G_4) oder 20 000 (bei G_5) Kunden

Die Firmen setzen durch Industriespionage ihre Werbestrategien nahezu gleichzeitig ein. Ist ein Werbefeldzug gestartet, ist er nicht mehr abzubrechen. Welche Strategien werden die beiden Firmen einsetzen?

- a) Die beiden Firmen können sich nach der Strategie der Elimination dominierter Zeilen / Spalten richten. Wird diese Strategie zu einem eindeutigen Endzustand führen?
- b) Die beiden Firmen können die Maximin-Strategie verwenden. Welcher Endzustand stellt sich ein?
- c) Wie viele Nash-Gleichgewichte hat das vorliegende Spiel? Begründen Sie Ihre Antwort.