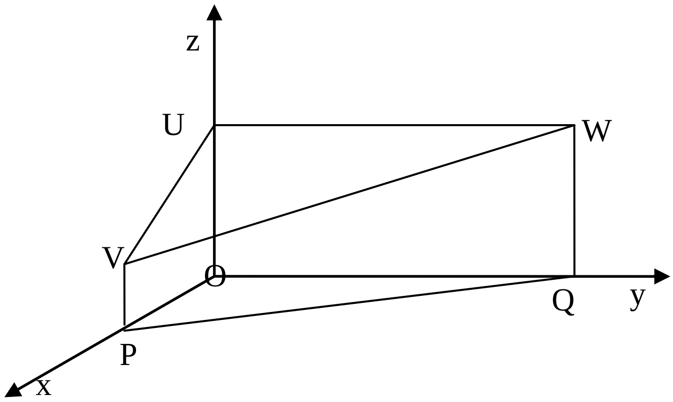
KANTON LUZERN
Bildungs- und Kulturdepartement

Kantonsschule Alpenquai Luzern

**Schriftliche Maturitätsprüfung 2014**

| | |
|---|---|
| **Fach** | *Mathematik Grundlagenfach* |
| **Prüfende Lehrperson** | *Sibille Burkard (sibille.burkard@edulu.ch)* |
| **Klasse** | *6Rb* |
| **Prüfungsdatum** | *Freitag, 23. Mai 2014* |
| **Prüfungsdauer** | *180 Minuten* |
| **Erlaubte Hilfsmittel** | *„Formeln, Tabellen, Begriffe", DMK, DPK, DCK (2009)*<br>*Taschenrechner TI30, Voyage 200 ohne Handbuch* |
| **Anweisungen** | *Es wird Wert auf eine saubere Darstellung gelegt.*<br>*Jede Aufgabe soll auf einem neuen Bogen begonnen werden und muss einen vollständigen und nachvollziehbaren Lösungsweg enthalten.*<br>*Jeder Bogen ist mit Namen und Nummer zu beschriften.* |
| **Anzahl erreichbarer Punkte** | *Aufgabe 1: 12.0*<br>*Aufgabe 2: 12.5*<br>*Aufgabe 3: 11.0*<br>*Aufgabe 4: 13.0*<br>*Total: 48.5*<br><br>*Die Note 6 wird für 43 Punkte erteilt.* |
| **Anzahl Seiten (inkl. Titelblatt)** | *5* |

| **Aufgabe 1** | a) | b) | c) | d) | e) | f) | **Punkte** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Vektorgeometrie** | 2 | 1.5 | 2 | 1 | 2 | 3.5 | 12 |




Der skizzierte Körper stellt eine moderne Mehrzweckhalle mit dreieckigem Grundriss und Schrägdach dar. Die Rückwand OQWU der Halle ist ein Rechteck und liegt in der yz-Ebene. Ferner sind die Punkte $P(4|0|0)$, $Q(0|12|0)$ und $V(4|0|2)$ gegeben.

a) Bestimmen Sie für die Ebene, die das Trapez PQWV enthält, eine Parametergleichung und eine Koordinatengleichung.

b) Die Ebene, die durch die Punkte U, V und W definiert wird, hat eine Gleichung der Form $3x+4z+d=0$. Bestimmen Sie den Wert der Konstanten d und, unter Verwendung der Ebenengleichung, die Koordinaten der Punkte U und W.

Verwenden Sie im Folgenden $W(0|12|5)$.

c) Berechnen Sie die Koordinaten des Diagonalenschnittpunkts D im Trapez PQWV.

d) Zeigen Sie, dass der Punkt $S\left(\frac{4}{3}|4|4\right)$ der Schwerpunkt des Dreiecks UVW ist.

e) Berechnen Sie den Winkel $\sphericalangle QSP$.

f) Im Punkt S der Decke UVW ist eine Lampe montiert, die einen zur Decke senkrechten Lichtstrahl $\ell$ in den Saal wirft. Der Lichtstrahl wird an der Rückwand im Punkt R reflektiert, und der reflektierte Strahl trifft den Boden der Halle im Punkt B. Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte R und B.

| **Aufgabe 2** **Analysis** | a) | b) | c) | d) | e) | f) | **Punkte** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 5 | 1 | 1 | 1 | 1.5 | 3 | 12.5 |

Gegeben ist die Funktion $f(x)=\frac{(x+2)^2}{x^2}$. Ihr Graph wird mit $G_f$ bezeichnet.

a) Bestimmen Sie die Definitionsmenge, Nullstellen, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkte von f.

b) Skizzieren Sie $G_f$ und seine Asymptoten unter Einbezug der Ergebnisse aus a).

Gegeben sind nun zusätzlich die Geraden $g_a(x)=ax-2a+4$ mit dem Parameter a, sowie der Punkt $Q(2|4)$ auf dem Graphen von f.

c) Zeigen Sie, dass alle Geraden $g_a$ durch den Punkt Q verlaufen.

d) Berechnen Sie den Wert von a, für den die Gerade $g_a$ Tangente an $G_f$ im Punkt Q ist.

e) Zeichnen Sie alle Geraden $g_a$, welche mit dem Graphen $G_f$ genau zwei Punkte gemeinsam haben, in die Skizze aus b) ein. *Es ist keine Rechnung verlangt.*

f) Die Punkte $A(u|0)$, $B\big(u|f(u)\big)$ und der Ursprung $O(0|0)$ bilden für positive u das Dreieck ABO. Wie muss u gewählt werden, wenn der Flächeninhalt des Dreiecks minimal werden soll? Wie gross ist dieser minimale Flächeninhalt?

| **Aufgabe 3** | a) | b) | c) | d) | e) | f) | **Punkte** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Analysis** | 0.5 | 2.5 | 1.5 | 1.5 | 2 | 3 | 11 |

Die Funktion f ist gegeben durch $f(x)=\sqrt{x+2}$, ihr Graph heisst $G_f$.

a) Bestimmen Sie die Definitionsmenge von f.

b) Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks, das von $G_f$, der Tangente an $G_f$ an der Stelle $x_0=7$ sowie der x-Achse eingeschlossen wird.

c) Durch die Punkte $P(2\,|\,2)$ und $Q(2.5\,|\,0)$ wird eine Gerade gelegt. Bestimmen Sie den Winkel zwischen dieser Geraden und der Tangente an $G_f$ im Punkt P.

d) Das Flächenstück zwischen der Horizontalen durch den Punkt $P(2\,|\,2)$ und $G_f$ wird auf dem Intervall $[-2,\ 2]$ um die x-Achse rotiert. Wie gross ist das Volumen des entstehenden Rotationskörpers?

Gegeben ist ausserdem die Funktion $h(x)=\frac{1}{4}(x-u)^2+\frac{3}{4}$ mit dem Parameter u. Ihr Graph heisst $G_h$.

e) Bestimmen Sie den Parameter u so, dass sich die Graphen $G_f$ und $G_h$ berühren. Wie lauten die Koordinaten des Berührpunkts B?

Anstelle von $h(x)$ wird nun die allgemeinere Parabel $g(x)=a(x-u)^2+v$ mit den Parametern a, u und v betrachtet.

f) Der Graph von g schneidet die x-Achse zweimal. Die Steigung bei der kleineren Nullstelle $x_1=2$ beträgt 6. Die Fläche, welche vom Graphen von g und der x-Achse eingeschlossen wird, ist 16 Flächeneinheiten gross. Berechnen Sie a, u und v.

| Aufgabe 4 | a) | b) | c) | d) | e) | f) | Punkte |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Wahrscheinlichkeitsrechnung** | 2 | 1 | 2 | 2.5 | 2 | 3.5 | 13 |

Frau Scheiwiler hat die vier Kinder Anton, Bruno und Claudia und Daniela.

a) Auf wie viele Arten können die vier Kinder auf einem Vierersofa in einer Reihe sitzen, wenn
   i. keine Einschränkungen gemacht werden;
   ii. Daniela aussen sitzen will;
   iii. Claudia nicht neben Bruno sitzen will?

b) Alle vier Kinder sind zu Hause. Wie viele Möglichkeiten gibt es, um die Mutter und drei ihrer Kinder auf das Vierersofa zu setzen, wenn keine Einschränkungen gemacht werden?

Frau Scheiwiler wird heute Abend bei ihrer Heimkehr ihre vier Kinder **A**nton, **B**runo, **C**laudia und **D**aniela (unabhängig voneinander) erfahrungsgemäss mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten $P(A)=\frac{2}{5}$, $P(B)=\frac{3}{8}$, $P(C)=\frac{3}{10}$ und $P(D)=\frac{1}{5}$ zu Hause antreffen.

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit
   i. sind an einem Abend nur Anton und Bruno zu Hause;
   ii. ist an einem Abend mindestens ein Kind zu Hause?

d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gibt es während einer Woche (= 7 Abende)
   i. genau 2 Abende, an denen kein Kind zu Hause ist;
   ii. mehr als 2 Abende, an denen kein Kind zu Hause ist?

e) Wie viele Abende müssen mindestens vergehen, damit Frau Scheiwiler mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% an mindestens einem Abend alle Kinder zu Hause antrifft?

Bei Scheiwilers ist folgendes Spiel sehr beliebt:

Man zahlt 2 Franken Einsatz in die Haushaltskasse und darf eine faire Münze mit den Seiten "0" und "1" genau so lange werfen, bis eine der beiden Seiten insgesamt zum dritten Mal erscheint. Aus der Haushaltskasse werden dann die Anzahl der geworfenen "Einsen" in Franken ausbezahlt, und das Spiel ist beendet.

f) Mit welchem mittleren Gewinn bzw. Verlust kann bei diesem Spiel gerechnet werden? Runden Sie das Resultat auf 5 Rappen.