

Kantonsschule Alpenquai Luzern

Fach	<i>Mathematik Grundlagenfach</i>
Prüfende Lehrpersonen	<i>Sibille Burkard (sibille.burkard@edulu.ch) Patrik Hess (patrik.hess@edulu.ch) Simon Wehrle (simon.wehrle@edulu.ch)</i>
Klassen	<i>6La / 6Na / 6Rb / 6Wa</i>
Prüfungsdatum	<i>Freitag, 24. Mai 2013</i>
Prüfungsdauer	<i>180 Minuten</i>
Erlaubte Hilfsmittel	<i>„Formeln, Tabellen, Begriffe“, DMK, DPK, DCK (2009) Taschenrechner TI-30, Voyage 200 (oder TI-92 Plus) ohne Handbuch</i>
Anweisungen	<i>Es wird Wert auf eine saubere Darstellung gelegt. Jede Aufgabe soll auf einem neuen Bogen begonnen werden und muss einen vollständigen und nachvollziehbaren Lösungsweg enthalten. Beschriften Sie jeden Bogen mit Ihrem Namen und der Ihnen zugeteilten Nummer!</i>
Anzahl erreichbarer Punkte	<i>Aufgabe 1: 12 Aufgabe 2: 12 Aufgabe 3: 12 <u>Aufgabe 4: 8</u> Total: 44 Die Note 6 wird für 40 Punkte erteilt</i>
Anzahl Seiten (inkl. Titelblatt)	<i>4</i>

Aufgabe 1	a	b	c	d	e	f	Punkte
Vektorgeometrie	1	1	2	2	1	5	12

Gegeben sind die Punkte $A(0|-9|-4)$, $B(6|-4|-5)$, $C(5|1|-4)$ und $D(-1|-4|-3)$. Die Ebene E durch die Punkte A , B und C ist gegeben durch $E: 2x - y + 7z + 19 = 0$.

- Zeigen Sie, dass der Punkt D in der Ebene E liegt.
- Zeigen Sie, dass $ABCD$ ein Parallelogramm ist.
- Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Parallelogramms $ABCD$.

Die Ebene E sei nun ein Spiegel. Vom Punkt $R(5.25|-4.5|-1)$ geht ein Lichtstrahl aus

in Richtung $\begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$.

- Zeigen Sie, dass der Lichtstrahl den Spiegel im Parallelogramm $ABCD$ trifft.
- In welchem Winkel trifft der Lichtstrahl auf den Spiegel?
- Berechnen Sie eine Parametergleichung des reflektierten Lichtstrahls und untersuchen Sie, ob der Punkt $S(-1.75|-4.5|1)$ vom reflektierten Lichtstrahl getroffen wird.

Aufgabe 2	a	b	c	Punkte
Analysis	3.5	5.5	3	12

Die Funktionen f und g sind gegeben durch $f(x) = -x^3 + 3x^2$ und $g(x) = \frac{-6}{(x-2)^2}$. Ihre Graphen werden im Folgenden G_f und G_g genannt.

- Berechnen Sie den Schnittwinkel zwischen G_f und G_g .
 - G_f und G_g begrenzen zusammen mit der x -Achse eine nach rechts ins Unendliche reichende Fläche. Wie gross ist der Inhalt dieser Fläche?
- Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunkts W von f .
 - In welchen Punkten P von G_f beträgt die Tangentensteigung -9 ?
 - Wählen Sie den Punkt P aus ii) mit positiver x -Koordinate und bestimmen Sie die Gleichung der Geraden h , welche durch P und W verläuft. G_f und die Gerade h schliessen zwei Flächen ein. Eine Fläche wird von der y -Achse unterteilt, in welchem Verhältnis?
 - Das kleinere der beiden Flächenstücke aus iii) rotiert um die x -Achse. Bestimmen Sie das Rotationsvolumen des entstehenden Körpers.
- Die Punkte $A(1|0)$, $B(b|0)$, $C(b|f(b))$ und $D(1|f(1))$ sind die Ecken eines Vierecks. Wie muss b gewählt werden, wenn $1 < b < 3$ und der Flächeninhalt des Vierecks maximal sein soll? Wie gross ist dieser maximale Flächeninhalt?

Aufgabe 3	a	b	c	d	e	Punkte
Wahrscheinlichkeitsrechnung	1	1	5	1	4	12

Emma feiert ihren sechsten Geburtstag und durfte 10 Freunde zu ihrem Kinderfest einladen.

- a) In wie vielen Reihenfolgen können Emmas Freunde bei ihr klingeln, wenn sie nacheinander eintreffen?
- b) Linus und Noah erscheinen erst, als Emma mit ihren anderen acht Freunden bereits im Wohnzimmer im Kreis sitzt und Geschenke öffnet. Auf wie viele Arten können sich Linus und Noah dazu setzen, sodass anschliessend alle 11 Kinder einen Kreis bilden?
- c) Vom Wohnzimmer aus führt eine 5-stufige Treppe hinauf ins Esszimmer, wo der Geburtstagskuchen auf die Kinder wartet. Emmas Mutter hat sich dazu folgendes Spiel ausgedacht:
Die Kinder werfen einen Würfel, welcher anstelle von Zahlen farbige Seitenflächen hat (rot, grün, blau, gelb, weiss, schwarz). Um die nächst höhere Stufe zu erreichen, muss Emmas Lieblingsfarbe, rot, geworfen werden. Wird eine andere Farbe geworfen, so muss das jeweilige Kind auf der bisherigen Stufe stehen bleiben. Der Würfel ist aber nicht fair, sondern zeigt die Farbe rot mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{3}$ und die restlichen fünf Farben mit je derselben Wahrscheinlichkeit.
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit überwindet Emma die Treppe in fünf Würfeln?
 - Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann Emma in 10 Würfeln genau viermal eine Stufe steigen?
 - Wie oft müsste gewürfelt werden, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99% mindestens einmal eine Stufe höher zu steigen?
- d) Als alle Kinder am Kuchentisch sitzen, möchte Emma die sechs brennenden Kerzen auspusten.
Wie viele Ergebnisse (Beispiel: $\overline{B}\overline{B}\overline{B}\overline{B}\overline{B}\overline{B}$ mit $B = \text{“Kerze brennt“}$) sind bei diesem Versuch “Einmal pusten“ möglich?
- e) In den Tagen vor ihrem Geburtstag hat Emma in unzähligen Versuchen geübt die sechs Kerzen auszupusten. Bei jedem Versuch pustete sie einmal. Dabei schaffte sie es in gleich vielen Versuchen, gar keine, nur eine oder zwei Kerzen auszupusten. Doppelt so oft gelang es ihr, drei Kerzen auszupusten und sogar dreimal so häufig brannte danach gar keine Kerze mehr. Fünf Kerzen pustete sie doppelt so häufig aus wie nur drei Kerzen und vier Kerzen pustete sie doppelt so häufig aus wie fünf Kerzen.
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten, mit welchen Emma bei einem weiteren Versuch 0, 1, 2, ..., 6 Kerzen auspusten wird.
 - Wie viele Kerzen wird Emma im Mittel in einem Versuch auspusten?

Aufgabe 4 Analysis	a	b	Punkte
	3.5	4.5	8

Zwei unabhängige Kurzaufgaben:

- a) Eine Polynomfunktion 3. Grades hat im Punkt $W(-\frac{1}{2}|2)$ einen Wendepunkt und $n(x) = -\frac{1}{11}x + \frac{56}{11}$ ist die Normale im Punkt $P(1|?)$ an den Graphen der Polynomfunktion.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Polynomfunktion.
- b) Einer geraden, quadratischen Pyramide mit der Grundseite s und der Höhe h wird eine quadratische Säule (Quader mit quadratischer Grundfläche) einbeschrieben.
Bestimmen Sie die Grundseite x und die Höhe y der quadratischen Säule in Abhängigkeit von s und h , so dass ihr Volumen maximal ist.

Skizze:

