

Schriftliche Maturaprüfung 2013
Ergänzungsfach Anwendungen der Mathematik

	a	b	c	d	e	f	
Aufgabe 1	1.5	1	3	4	3	0.5	13 Punkte

Die kubische Gleichung

$$y^3 - 6y^2 + 18y - 108 = 0 \quad (1)$$

kann mittels einer geeigneten Substitution (Ersetzung) für y in die spezielle kubische Gleichung

$$x^3 + 6x = 88 \quad (2)$$

überführt werden.

Für Gleichungen des Typs $x^3 + px = q$ kann eine Lösung mit der Cardanischen Lösungsformel berechnet werden:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

a) Wie muss die Variable y durch die Variable x ersetzt werden, damit die Substitution die gewünschte Wirkung erzielt? Den Taschenrechner dürfen Sie für das Ausmultiplizieren und Zusammenfassen von Termen verwenden.

b) Zeigen Sie, dass die Anwendung der Cardanischen Formel auf die Gleichung (2) zur Frage führt, wie die Kubikwurzeln

$$\sqrt[3]{44 + 18\sqrt{6}} \quad \text{und} \quad \sqrt[3]{44 - 18\sqrt{6}}$$

berechnet werden können.

Diese Berechnung soll taschenrechnerlos erfolgen.

Wie eine derartige Berechnung beginnen kann, hat uns Niccolò Tartaglia (1500-1557) am Beispiel der Kubikwurzel $\sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}}$ demonstriert:

1 ... man muss die besagte 10 so in zwei Teile zerlegen, dass der eine von diesen eine
 2 Kubikzahl ist und der andere in drei gleiche Teile ohne Brüche geteilt werden kann,
 3 und um sie zu finden, subtrahiere ich von der besagten 10 jede von den in der
 4 besagten 10 enthaltenen Kubikzahlen, das sind 1 und 8, und schaue, welche von
 5 ihnen mir einen Rest gibt, der (wie gesagt) in drei gleiche Teile teilbar ist,
 6 und wir werden finden, dass es die 1 ist und nicht die 8. Nun sage ich, dass
 7 die Kubikwurzel aus 1, welche ebenfalls 1 ist, der kleinere Teil der besagten
 8 binomischen Kubikwurzel ist, ...

c) Erläutern Sie algebraisch, was die Grundidee des Lösungsverfahrens von Tartaglia ist. Nehmen Sie in Ihren Erklärungen Bezug auf die Textzeilen und machen Sie dadurch den Text von Tartaglia verständlich.

d) Führen Sie das Verfahren von Tartaglia durch, um die Kubikwurzeln

$$\sqrt[3]{44 + 18\sqrt{6}} \quad \text{und} \quad \sqrt[3]{44 - 18\sqrt{6}}$$

taschenrechnerlos zu berechnen. Argumentieren Sie sorgfältig.

Benutzen Sie die Resultate, um zu zeigen, dass die Gleichung (2) die Lösung 4 hat.

Schriftliche Maturaprüfung 2013
Ergänzungsfach Anwendungen der Mathematik

- e) Weisen Sie mit Hilfe einer Linearfaktorabspaltung und durch das Lösen einer quadratischen Gleichung nach, dass die Gleichung (2) keine weiteren reellen Lösungen mehr besitzt.
 f) Welche Lösung muss diesen Berechnungen zufolge die Gleichung (1) haben?

	a	b	c	
Aufgabe 2	1	1	2	4 Punkte

Anna wird gefragt, für welche natürlichen Zahlen n die Behauptung

$$8 \text{ ist ein Teiler von } n(2n + 8)(3n + 5)$$

gilt.

- a) Sie vermutet, dass die Aussage für alle geraden Zahlen gilt. Weisen Sie diese Vermutung nach.
 b) Als nächstes vermutet Anna, dass die Aussage für alle ungeraden Zahlen stimmt, die bei der Division durch 8 den Rest 1 ergeben. Weisen Sie diese Vermutung nach.
 c) Für welche natürlichen Zahlen ist die Aussage auch noch wahr? Stellen Sie eine Vermutung auf und beweisen Sie sie.

	a	b	
Aufgabe 3	4	3	7 Punkte

Gegeben sind die Punkte $A(3/ - 2/4)$, $B(8/4/2)$ und $C(4/ - 14/ - 3)$.

- a) Welchen Abstand hat der Punkt $P(25/ - 17/15)$ von der Ebene $E(ABC)$?
 b) Der Schwerpunkt des Dreiecks ABC ist der Punkt $S(5/ - 4/1)$. Eine Pyramide hat als Grundfläche das Dreieck ABC . Ihre Spitze D liegt senkrecht über dem Schwerpunkt S . Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes D , wenn das Volumen der Pyramide 198 ist.

	a	b	c	
Aufgabe 4	6	1	1	8 Punkte

Eine Seerosenkolonie in einem ruhigen, flachen, $S = 250 \text{ m}^2$ grossen Teich bedeckt zur Zeit $t = 0$ Tage eine Fläche $A(0) = 10 \text{ m}^2$. Die Wachstumsrate $A'(t)$ ist proportional zur schon bedeckten Fläche $A(t)$ und zum noch zur Verfügung stehenden Platz $S - A(t)$ im Teich (logistisches Wachstum). Die Wachstumskonstante (Proportionalitätskonstante) ist $\lambda = 0.0001$.

- a) Stellen Sie die Differentialgleichung für die Funktion $A(t)$ auf und lösen Sie sie mit Hilfe einer Separation der Variablen sowie einer Partialbruchzerlegung.
 b) Begründen Sie mit Hilfe der Lösungsfunktion, warum gemäss dem zu Grunde liegenden Modell der Teich nie vollständig mit Seerosen bedeckt sein wird.
 c) Wann ist die Hälfte der gesamten Oberfläche des Teiches von Seerosen bedeckt?

Schriftliche Maturaprüfung 2013
Ergänzungsfach Anwendungen der Mathematik

	a	b	c	d	
Aufgabe 5	2	3.5	0.5	1	7 Punkte

Gegeben ist die inhomogene DGL

$$y' \cdot \cos(x) + 3y \cdot \sin(x) = x \cdot \cos^5(x),$$

wobei $-\pi < x < \pi$ ist.

Bestimmen Sie

- die allgemeine Lösung der homogenen DGL durch Separation der Variablen.
- eine partikuläre Lösung der inhomogenen DGL mit einer Variation der Konstanten.
- die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL.
- mit Hilfe von c) die Lösung der inhomogenen DGL für $y(0) = \frac{3}{2}$.

	a	b	c	d	e	
Aufgabe 6	1	1	2	3	2	9 Punkte

In einer Fernsehsendung behauptet Madam Pet, sie könne nur durch das Betrachten eines Bildes erfühlen, unter was für einer Krankheit das darauf abgebildete Haustier leidet.

Alle Tiere, von denen Fotos gezeigt werden, leiden an einer von acht nicht offensichtlichen Krankheiten.

Madam Pet werden 12 Fotos von verschiedenen Haustieren gezeigt. Sie darf diese betrachten und muss eine der acht Krankheiten nennen.

- Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person durch blosses Raten in 12 Versuchen höchstens 2 Krankheiten richtig errät?
- Erreicht Madam Pet in 12 Versuchen mindestens 5 Treffer, so will man ihr eine besondere Begabung zuschreiben. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass man einer nur ratenden Person irrtümlich besondere Begabung zuschreibt?

Madam Pet errät in diesem Test sogar sechs Krankheiten richtig, doch die Fachjury überzeugt sie damit noch immer nicht.

Nun soll ihre Begabung einem grossen Test mit 40 Fotos unterzogen werden. Das Risiko, Madam Pet fälschlicherweise eine besondere Begabung zuzuschreiben, wird auf 2.5% festgesetzt (Signifikanzniveau).

- Formulieren Sie die Hypothesen formal und in Worten.
- Bestimmen Sie die Testverteilung. Ermitteln Sie den Verwerfungsbereich und die Entscheidungsregel. Wird Madam Pet eine besondere Begabung attestiert, wenn sie bei 12 der 40 gezeigten Tiere deren Krankheit richtig benennt?
- Dr. Rabbit ist ein anerkannter Experte für Tierkrankheiten. In einem vergleichbaren Experiment war er in der Lage, in einem Drittel der Fälle die vorliegende Krankheit richtig zu benennen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass er in dem Versuch, den Madam Pet bestehen soll, scheitert? Interpretieren Sie diesen Fehler.