Kantonsschule Alpenquai Luzern

Schriftliche Maturitätsprüfung 2012 *Mathematik Grundlagenfach*

Prüfende Lehrer	*Andreas Kaufmann andreas.kaufmann@edulu.ch* *Roman Oberholzer roman.oberholzer@edulu.ch*
Klassen	*6Na, 6Ld*
Prüfungsdatum	*Dienstag, 29. Mai 2012*
Prüfungsdauer	*180 Minuten*
Erlaubte Hilfsmittel	- *Formelsammlung „Formeln – Tafeln - Begriffe“* - *Taschenrechner: TI30 und Voyage 200 (ohne Handbuch)*
Anweisungen	- *Es wird Wert auf eine saubere Darstellung gelegt.* - *Jede Aufgabe auf einem neuen Bogen beginnen.* - *Jede Aufgabe muss einen vollständigen und nachvollziehbaren Lösungsweg enthalten.* - *Jeder Bogen ist mit dem Namen zu versehen.*
Anzahl erreichbarer Punkte	*Aufgabe 1: 14* *Aufgabe 2: 10* *Aufgabe 3: 11* *Aufgabe 4: 10* *Total: 45*
Anzahl Seiten	*4*

Aufgabe 1 – Analysis	a	b	c	d	e	**Punkte**
	3	5	2	2	2	14

Eine Parabel f(x) dritten Grades besitzt an der Stelle x = -2 ein Extremum und die Tangente im Wendepunkt W(-1/2) geht durch den Ursprung. Zudem ist die Funktion $g(x)=\frac{2x^2+x+11}{3-3x}$ gegeben.

a. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung f(x) der Parabel.

Wenn Sie Aufgabe a. nicht lösen konnten, fahren Sie mit der Funktion $f(x)=\frac{2}{3}x^3+2x^2+\frac{2}{3}$ *weiter.*

b. Die Funktion g(x) besitzt keine Nullstellen und keine Wendepunkte. Führen Sie für die Funktion g(x) eine Kurvendiskussion durch, indem Sie Ableitungen, Definitionsbereich, Extrema sowie Asymptoten bestimmen und anschliessend den Graphen zeichnen. *Einheiten*: 2 Häuschen oder 1cm.

c. Wo schneiden sich die Graphen von f(x) und g(x) rechtwinklig?

d. Bestimmen Sie die Fläche, welche von den Graphen von f(x) und g(x) sowie der y-Achse eingeschlossen wird.

Wenn Sie in Aufgabe b. die schiefe Asymptote von g(x) nicht bestimmen konnten, lösen Sie Aufgabe e. mit der schiefen Asymptoten $y=-\frac{3}{4}x-1$.

e. Um wie viele Einheiten muss der Graph von f(x) vertikal nach unten oder nach oben verschoben werden, damit er die schiefe Asymptote des Graphen von g(x) berührt?

Aufgabe 2 – Analysis	a	b	c	d	**Punkte**
	2	1.5	3	3.5	10

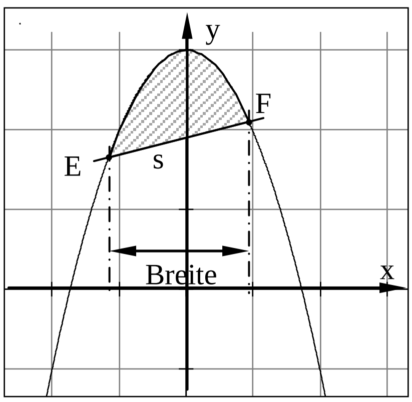
Wir betrachten die Funktionen $f(x)=-x^2+3$ und $g(x)=e^x$.

a. An welchen Stellen schneidet die Tangente an den Graphen von g(x) im Punkt A(0/y) den Graphen von f(x)?

b. Die von den beiden Graphen von f(x) und g(x) eingeschlossene Fläche rotiert um die x-Achse. Berechnen Sie das Rotationsvolumen des so entstandenen Körpers.

c. Dem Graphen von f(x) oberhalb der x-Achse wird das Dreieck BCD mit B als negativer Nullstelle von f(x), C(u/0) und D(u/f(u)) einbeschrieben. Für welchen Punkt D wird die Dreiecksfläche maximal?

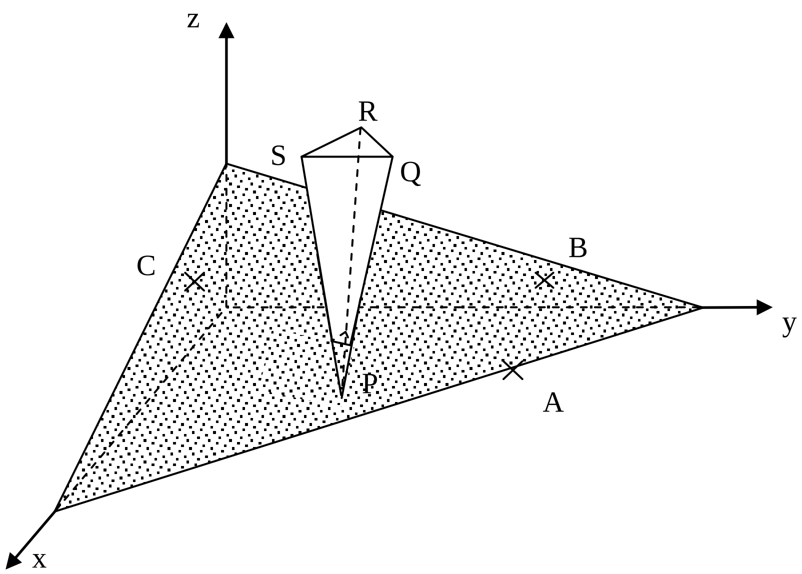
d. Eine Sekante s durch zwei Punkte E und F der Parabel schliesst mit der Parabel die schraffierte Fläche ein, ein sogenanntes **Parabelsegment** (siehe Figur). Die Differenz der x-Koordinaten der Punkte E und F heisst **Breite des Parabelsegments**. Beweisen Sie, dass alle Segmente der Breite 2 der Parabel $f(x)=-x^2+3$ die gleiche Fläche haben.



Aufgabe 3 – Vektorgeometrie	a	b	c	d	e	Punkte
	2	2	1.5	2	3.5	11

In einen schiefen Hang soll eine Blumenvase aus Beton in Form einer umgekehrten und nach oben offenen dreiseitigen Pyramide gesteckt werden. Die drei Punkte A(6|12|0), B(8|7|1) und C(2|1|4) liegen auf dem Hang, die Vase wird durch die Punkte P(6|5|-1), Q(9|6|5), R(5|9|5) und S(6|2|5) definiert.

Skizze:



a. Berechnen Sie die Koordinatengleichung der Hang-Ebene E_{ABC}.

Falls Sie die Ebene in Aufgabe a. nicht ermitteln konnten, rechnen Sie mit der Ersatzebene
E: 3x + 4y + 14z – 67 = 0 weiter.

b. Berechnen Sie, wie stark der Hang im Verhältnis zur Horizontalen (= xy-Ebene) geneigt ist.

c. Zeigen Sie, dass der Winkel $\alpha = \sphericalangle(SQR)$ ein rechter Winkel ist.

d. Noch bevor die Vase das erste Mal mit Blumenschmuck gefüllt werden konnte, ist sie nach intensiven Niederschlägen mit Wasser vollgelaufen. Berechnen Sie das Volumen des Wassers in der Pyramide PQRS.

e. Obwohl die Vase teilweise im Boden steckt, wurde sie vom Wind umgeweht. Zur Verstärkung wird der Punkt R der Vase mit einem möglichst kurzen Stahlseil mit einer Eisenstange verbunden, welche durch die Punkte B und C verläuft. Berechnen Sie die Länge dieses Seils und die Koordinaten des Punktes T auf der Strecke BC, an dem das Stahlseil befestigt wird.

Aufgabe 4 – Wahrscheinlichkeit	a	b	c	d	e	f	Punkte
	1	1.5	1.5	2	2	2	10

Während ihrer Studienreise in Prag benutzen die Schülerinnen und Schüler häufig die Strassenbahn als Verkehrsmittel. Ein Billett kostet 12 Kronen. Kontrollen finden in 5% aller Strassenbahnen statt. Schwarzfahrer zahlen eine Busse von 400 Kronen.

a. Es gibt acht interessante Museen in Prag, jedoch hat die Klasse nur Zeit für fünf Museen. Wie viele Möglichkeiten gibt es, fünf Museen auszuwählen?

b. Auf wie viele Arten kann man die 9 Jungs der Klasse in drei 3er-Zimmer aufteilen?

c. Lena kauft mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.25 ein Billett für eine Fahrt mit der Strassenbahn. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit p, dass sie bei einer Fahrt eine Busse von 400 Kronen bezahlen muss?

Wenn Sie Aufgabe c. nicht lösen konnten, rechnen Sie mit $p = 0.03$ weiter.

d. Lena fährt 20 Mal mit der Strassenbahn. Mit welcher Wahrscheinlichkeit zahlt sie genau zweimal eine Busse?

e. Seien X Lenas Kosten für eine Fahrt. Bestimmen Sie die mittleren Fahrkosten E(X) für eine Fahrt.

f. Wie teuer muss das Billett mindestens sein, damit sich Lenas Strategie lohnt?