KANTON LUZERN Kantonsschule Luzern

MATURA 2010
Mathematik
Grundlagenfach

Obergymnasium

Klassen 6Ra (han), 6Ld (jeh)

Zeit: 180 Minuten

Es werden nur die vier am besten gelösten Aufgaben berücksichtigt. Jede Aufgabe wird mit maximal 10 Punkten bewertet.

Hilfsmittel: Formelsammlung DMK
Voyage 200 (oder TI-92) und TI-30

Der Einsatz der Hilfsmittel ist klar anzugeben.

Aufgabe 1 — Punkte: 1.5 / 2 / 3.5 / 3

Gegeben sind die Ebenen $E: 2x-2y+3z+5=0$ und $F: x-8y-4z-3=0$.

a) Bestimme den Schnittwinkel φ der beiden Ebenen E und F.

b) Ermittle eine Parameterdarstellung der Schnittgeraden s von E und F.

c) Ein Lichtstrahl geht von P(5/2/2) nach Q(10/3/5) und wird dazwischen an der Ebene E reflektiert. Berechne die Koordinaten des Reflexionspunktes R.

d) Ein *gerader* Kreiskegel mit dem Volumen $V=90\pi$ hat seinen Grundkreis in der Ebene F. Der Punkt $M(3/-1/z)$ ist der Mittelpunkt und $T(-1/y/-3)$ ein Peripheriepunkt des Grundkreises. Bestimme die Koordinaten der Kegelspitze S. Eine Lösung genügt.

Aufgabe 2 — Punkte: 3 / 3 / 1.5 / 2.5

Gegeben ist die Funktionsschar $f_a(x)=\frac{12x}{a}\cdot e^{-\frac{x}{a}}$ für a > 0.

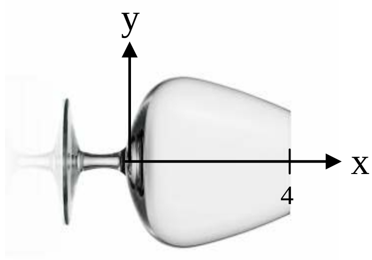
a) Bestimme die Nullstellen und die Extrem- und Wendepunkte von f_a.

b) Für welches a > 0 schliesst die Tangente an der Stelle $x=\frac{a}{2}$ an den Graphen der Funktion f_a mit der x-Achse einen Winkel von 60° ein?
Wo schneidet diese Tangente die x-Achse?

Für a = 2 kann die zugehörige Funktion f_2 über dem Intervall $[0,4]$ als Randfunktion eines liegenden Cognacglases aufgefasst werden, das (ohne Stiel) entsteht, wenn der Graph um die x-Achse rotiert.

c) Die Einheiten im Koordinatensystem seien in cm. Wie hoch steht die Flüssigkeit im (aufgestellten) Glas, wenn 50 cm^3 Cognac eingefüllt werden?

d) Ein kegelförmiges Cocktailglas mit der Spitze im Ursprung und der x-Achse als Kegelachse hat eine über dem Intervall $[0,4]$ definierte lineare Funktion als Randfunktion. Bestimme diese Randfunktion so, dass die xy-Ebene aus beiden Gläsern Schnittflächen mit demselben Flächeninhalt herausschneidet.



Aufgabe 3 **Punkte: 2.5 / 6.5 / 1**

Am Sporttag sind 8 Mannschaften für das Fussballturnier angemeldet. Die Mannschaft von Karl spielt dabei unter dem Namen "Kickers" und die Mannschaft von Willi hat sich den Namen "Wirbelwind" gegeben.

a) Im Vorrundenspiel werden aus den 8 Mannschaften durch Auslosung 2 Gruppen mit je vier Mannschaften gebildet.
Der Sportlehrer zieht zur Gruppeneinteilung nacheinander 4 Zettel mit den Mannschaftsnamen aus der Urne. Die 4 gezogenen Mannschaften spielen in der Gruppe A, während die 4 Mannschaften, deren Zettel noch in der Urne liegen, in der Gruppe B spielen.

a_1) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Sportlehrer im ersten Zug den Namen "Kickers" und im zweiten Zug den Namen "Wirbelwind" aus der Urne zieht?

a_2) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Sportlehrer den Namen "Wirbelwind" im 2. Zug und den Namen "Kickers" im 4. Zug aus der Urne zieht?

a_3) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sowohl die "Kickers" als auch die Mannschaft "Wirbelwind" in der Gruppe B spielen?

b) Jede Mannschaft besteht aus 6 Spielern: Torhüter, Stürmer links, Stürmer rechts, Verteidiger links, Verteidiger rechts und Mittelfeldspieler. Da bei den "Kickers" alle Spieler am liebsten im Sturm spielen, losen sie die Plätze vor jedem Spiel neu aus. Sie spielen an diesem Nachmittag 5 Spiele (3 in der Vorrunde, Halbfinal und Final).

b_1) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Karl im ersten Vorrundenspiel zusammen mit seinem Freund Martin, der auch bei den "Kickers" spielt, im Sturm steht?

b_2) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Karl zusammen mit seinem Freund Martin in genau 3 von 5 Spielen im Sturm steht?

b_3) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Karl in höchstens 2 von 5 Spielen Torhüter sein muss?

b_4) Wie viele Spiele müssten die "Kickers" bestreiten, damit Karl mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 80 % mindestens einmal als Mittelfeldspieler antritt?

b_5) Berechne mit Hilfe der Definition des Erwartungswertes: Wie viele Spiele als Verteidiger muss Karl im Mittel an diesem Nachmittag erwarten?

c) Die "Kickers" gewinnen das Fussballturnier. Für das Siegerfoto stellen sich die 6 Spieler nebeneinander auf. Wie viele mögliche Aufstellungen gibt es, in denen Karl neben seinem Freund Martin steht?

KANTON LUZERN Kantonsschule Luzern

MATURA 2010
Mathematik
Grundlagenfach

Obergymnasium **Klassen 6Ra (han), 6Ld (jeh)**

Aufgabe 4 — Punkte: 4 / 0.5 / 2 / 3.5

Eine ganzrationale Funktion f vom Grad 3 besitzt die Wendetangente $3x+3y-16=0$. Ihr Graph berührt die x-Achse an der Stelle x = 6.

a) Bestimme die Funktionsgleichung von f.
Wer die Funktionsgleichung nicht bestimmt hat, rechnet mit der Ersatzfunktion $f(x)=\frac{1}{10}x^3-\frac{6}{5}x^2+\frac{18}{5}x$ weiter.

b) Skizziere den Graphen von f für $-1\leq x\leq 8$.

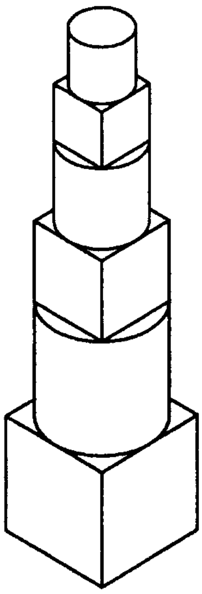
c) Der Graph von f hat genau einen Hochpunkt H. Durch diesen Punkt H werden die Parallelen zu den Koordinatenachsen gezogen. Diese beiden Parallelen bilden mit den Koordinatenachsen ein Rechteck. In welchem Verhältnis teilt der Graph von f diese Rechtecksfläche?

d) An den Graphen von f wird im Punkt $P(u/f(u))$ mit $2<u<6$ die Tangente t_p gelegt. Diese Tangente t_p schneidet die y-Achse im Punkt Q. Der Nullpunkt bildet mit den beiden Punkten P und Q ein Dreieck. Für welchen Wert von u wird der Flächeninhalt dieses Dreiecks maximal und wie gross ist dieser maximale Flächeninhalt?

Aufgabe 5 — Punkte: 3 / 3.5 / 3.5

Löse die drei voneinander unabhängigen Kurzaufgaben:

a) Bestimme den Wertebereich der Funktion $f:\ x \mapsto f(x)=\dfrac{x^3}{x^4+1}$.



b) Einem Würfel mit der Kantenlänge 1 m wird ein gerader Zylinder so aufgesetzt, dass die Grundfläche des Zylinders der Deckfläche des Würfels einbeschrieben ist. Jetzt wird dem Zylinder ein zweiter Würfel so aufgesetzt, dass dieses Mal die Grundfläche des zweiten Würfels der Deckfläche des Zylinder einbeschrieben ist. Dieser Prozess wird unendlich oft wiederholt (vgl. Zeichnung). Die Höhen der Zylinder sind jeweils gleich lang wie die Durchmesser ihrer Grundflächen.
Berechne die Kantenlängen der ersten beiden aufgesetzten Würfel sowie die Durchmesser der ersten beiden aufgesetzten Zylinder. Bestimme anschliessend die Höhe des Würfel-Zylinder-Turmes, wenn der beschriebene Prozess unendlich oft fortgesetzt wird.

c) Mit einem idealen Würfel wird viermal gewürfelt. Die geworfenen Augenzahlen werden zu einer vierstelligen Zahl zusammengesetzt. Untersucht werden diejenigen "Würfelzahlen", deren Quersumme 8 beträgt.

c_1) Die "Würfelzahl" 1214 hat die Quersumme 8. Wie viele solche Zahlen mit den Ziffern 1, 1, 2, 4 gibt es?

c_2) Wie viele "Würfelzahlen" mit der Quersumme 8 gibt es nun insgesamt?